

竖向裂缝对功能梯度板的热响应影响

田建辉*^{1,2}, 韩旭², 龙述尧³

(1. 西安工业大学 机电工程学院, 西安 710032; 2. 湖南大学 汽车车身先进设计制造国家重点实验室, 长沙 410082;
3. 湖南大学 力学与航空航天学院, 长沙 410082)

摘要:采用条单元法分析了竖向裂缝对功能梯度板的热响应影响。功能梯度板的材料属性沿板厚方向连续线性变化,温度变化热源作用于带竖向裂缝的功能梯度板上。通过研究得出了裂缝距离热源不同位置、不同长度裂缝及不同频率温度变化热源等状态时,功能梯度板上表面的热响应情况。采用条单元法研究带竖向裂缝的功能梯度板的热响应问题,为带裂缝的功能梯度板的热研究提供了一定的指导。

关键词:功能梯度板;热响应;条单元法
中图分类号:O34 **文献标识码:**A

1 引言

近年来,功能梯度材料在许多领域得到了广泛应用。在功能梯度材料的制造过程中,由于操作、设备或人为等因素,难免会使功能梯度材料内部出现裂缝等缺陷,这些缺陷为以后结构出现灾难性的破坏埋下了隐患,对功能梯度材料结构性能评价和裂缝研究至关重要。

研究者通过结合有限单元法技巧^[1-3]分析带裂纹弹性材料的波动弥散特性来判断裂纹的特点和位置。利用边界单元法^[4]研究波动的特性。将有限元法与边界元法结合^[5-7]起来研究波的弥散现象。更多学者对裂纹本身进行了大量的研究, Serkan Dag^[8]基于平衡域积分方法(EDI)对各向异性功能梯度材料 I 型裂缝在热应力作用下进行了研究。Thangjitham^[9]研究了金属基底上的功能梯度材料涂层的热应力问题。Tanigawa^[10]用有限元法对裂纹驱动力作了研究。Whitney^[11]用断裂力学的方法已经证明功能梯度材料裂纹尖端应力场与均质材料有相近的奇异性和分布。

采用有限元方法求解裂纹问题,需要比较大的存贮量,边界元方法比有限元方法存贮效率更高,

但目前还没有找到更有效、更具简单形式的格林函数。近年来发展起来的条单元法^[12](SEM)在混合数值法^[13-16]的基础上考虑了问题的通解,最终解由解析解和数值解组合而成,利用其方法各自的优势,使求解问题达到精确性和高效性。由于条单元法的高效性和所需存贮少等优点,在带裂缝的结构动力学响应问题中得到了广泛的应用^[17]。有关条单元法分析热源作用问题至今没有相关报道,本文采用条单元方法研究了温度变化热源作用下,功能梯度板存在竖向裂缝时,裂缝对板的热响应影响。本文的热响应特指由于热源作用所引起的位移响应。本文的研究中没有涉及到裂缝开裂及其有关的应力强度因子、裂纹尖端特性及 J 积分等问题。

2 基本方程

考虑板厚为 H ,带竖向裂缝的无限大功能梯度材料板,功能梯度材料板的区域可以表示为 $-\infty \leq (x, z) \leq +\infty, 0 \leq y \leq H$,其属性沿板厚方向连续线性变化。假设板中出现的裂缝贯穿于 z 方向,并且仅考虑竖向裂缝出现在表面的情况,此问题简化为二维情况如图 1 所示。图中 T 为外部作用的温度变化热源, a_c 为裂缝的长度, d_c 为裂缝离热源的距离。

假设温度变化热源大小为

$$T = \varphi(y)f(x)\exp(-i\omega t) \quad (1)$$

沿板厚向将板分成 N 个单元,式(1)中

$$\begin{cases} \varphi(y) = \Delta\varphi(\frac{\bar{y}}{N} + \frac{j-1}{N}) + \varphi_i \\ f(x) = \delta(x), j = 1, \dots, N \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期:2008-12-22;修改稿收到日期:2009-11-11.

基金项目:国防基础研究项目(A1420080166);国家杰出青年基金(10725208);高档数控机床与基础制造装备科技重大专项(2009ZX04001)资助项目.

作者简介:田建辉*(1979-),男,博士(E-mail:carl8@163.com);韩旭(1968-),男,教授;龙述尧(1945-),男,教授.

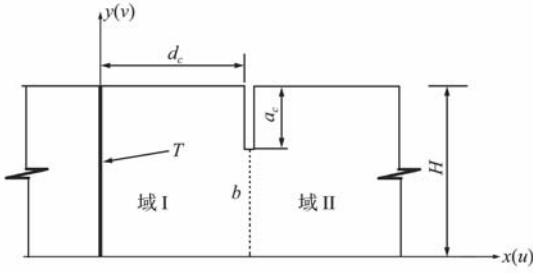


图1 问题域及坐标系
Fig. 1 Problem domain and coordinate

式中 $\Delta\varphi$ 为两个单元间的温度变化差, φ_1 为最下层的温度变化, N 为单元总数, $\delta(x)$ 为 x 的狄利克雷函数。

假设第 n 单元内温度变化热源引起的板内位移为

$$\mathbf{u}(x, y, t) = \mathbf{N}(y)\mathbf{U}(x)\exp(-i\omega t) \quad (3)$$

式中 $\mathbf{N}(y)$ 是沿 y 向的形函数矩阵, 具体形式为

$$\mathbf{N}(y) = [(1 - 3\bar{y} + 2\bar{y}^2)\mathbf{I} \quad 4(\bar{y} - \bar{y}^2)\mathbf{I} \quad (2\bar{y}^2 - \bar{y})\mathbf{I}] \quad (4)$$

式中 $\bar{y} = y/h$, h 为单元的厚度, $\mathbf{U}(x)$ 为位移因子, 是坐标 x 的函数。

由虚功原理可得温度热源作用下的控制动力学方程^[18],

$$-\mathbf{A}_2 \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x^2} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + (\mathbf{A}_0 - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{U} = \Phi \quad (5)$$

式中 \mathbf{A}_i ($i = 0, 1, 2$), \mathbf{M} 表达式见附表, Φ 为热载, 表达式如下。

$$\Phi = -\int_0^h \mathbf{N}^T(y)\mathbf{L}^T \mathbf{c} \lambda \varphi(y) f(x) dy + \mathbf{L}_y^T \mathbf{c} \lambda \varphi(y) f(x) |_{y=l, m, u} \quad (6)$$

式中 \mathbf{c} 和 λ 分别为弹性系数矩阵和热膨胀系数矩阵, \mathbf{L} 和 \mathbf{L}_y 为微分算子矩阵, 其表达式见附表, 右上角字母表示矩阵的转置。

运用数学知识求解式(5)得到问题的通解:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_c + \mathbf{U}_p = \mathbf{H}(x)\mathbf{C} + \mathbf{U}_p \quad (7)$$

下标 c 和 p 分别为方程补偿解和特解, $\mathbf{H}(x)$ 的表达式见附表。式(7)中的系数 \mathbf{C} 可以通过裂缝处的边界条件求解:

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}_b^{-1} \mathbf{U}_{cb} \quad (8)$$

下标 b 表示边界处的值。

在裂缝边界处应力值^[18] 可以表示为

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{K}\mathbf{U}_b + \mathbf{S}_p - \mathbf{Q} \quad (9)$$

式中

$$\mathbf{R}_b = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_b^L \\ \mathbf{R}_b^R \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{U}_b = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_b^L \\ \mathbf{U}_b^R \end{Bmatrix} \quad (10)$$

为竖向边界处的应力和位移向量, L 和 R 分别为左右边界处, 式(9)中的刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1t} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{1t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2t} & \frac{\partial \mathbf{H}^L}{\partial x} \mathbf{H}_b^{-1} \\ \mathbf{R}_{2t} & \frac{\partial \mathbf{H}^R}{\partial x} \mathbf{H}_b^{-1} \end{bmatrix} \quad (11)$$

向量 \mathbf{S}_p 为边界处的平衡应力, 表示为

$$\mathbf{S}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2t} & 0 \\ 0 & \mathbf{R}_{2t} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_{pb}^L}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{U}_{pb}^R}{\partial x} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2t} & \frac{\partial \mathbf{H}^L}{\partial x} \mathbf{H}_b^{-1} \\ \mathbf{R}_{2t} & \frac{\partial \mathbf{H}^R}{\partial x} \mathbf{H}_b^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{pb}^L \\ \mathbf{U}_{pb}^R \end{Bmatrix} \quad (12)$$

向量 \mathbf{Q} 看作边界处的平衡热应力, 表示为

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \Gamma_x T_b^L \\ \Gamma_x T_b^R \end{Bmatrix} \quad (13)$$

当功能梯度板不受任何外载作用时, 式(9)中,

$$\mathbf{R}_b = 0, \quad \mathbf{Q} = 0, \quad \mathbf{U}_b = \mathbf{U}_{cb} \quad (14)$$

此时, 式(9)变成

$$\mathbf{K}\mathbf{U}_{cb} + \mathbf{S}_p = 0 \quad (15)$$

上式可以求出 \mathbf{U}_{cb} 代入式(8)求得系数 \mathbf{C} 。

用 ψ_m 表示方程(5)的特征值 k_m 所对应的特征向量, ψ_m^L 和 ψ_m^R 分别表示左右特征向量。

$$\psi_m^L = [\psi_{m1}^L, \psi_{m2}^L], \quad \psi_m^R = \begin{Bmatrix} \psi_{m1}^R \\ \psi_{m2}^R \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式中 $\psi_{m1}^L, \psi_{m2}^L, \psi_{m1}^R$ 和 ψ_{m2}^R 为 $M \times M$ 维向量。

式(7)中的特解可以由下式求得

$$\mathbf{U}_p = \begin{cases} -i \sum_{m=1}^M \frac{\psi_{m2}^{+L} (\mathbf{B}_S - \mathbf{B}_{V2}) \psi_{m1}^{+R}}{\mathbf{E}_m^+} e^{-ik_m^+(x-x_0)} & x \geq x_0 \\ i \sum_{m=1}^M \frac{\psi_{m2}^{-L} (\mathbf{B}_S - \mathbf{B}_{V2}) \psi_{m1}^{-R}}{\mathbf{E}_m^-} e^{-ik_m^-(x-x_0)} & x < x_0 \end{cases} \quad (17)$$

式中 $\mathbf{E}_m = \psi_m^L \mathbf{E} \psi_m^R$, \mathbf{E} 表达式见附表, 式中上标加号表示特解为 x_0 处右边界解, 反之则反。 \mathbf{B}_S 和 \mathbf{B}_{V2} 见附表。

3 带竖向裂缝的功能梯度板热响应

在本问题的计算过程中, 考虑了由不锈钢和氮

表 1 不锈钢与氮化硅材料的物理属性

Tab.1 The physical character of the stainless steel and silicon nitrogen

材料	E(GPa)	μ	$\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$	$\lambda(\text{C}^{-1} \times 10^{-6})$
不锈钢	237.82	0.3177	8166	{18,18,18,0,0,0} ^T
氮化硅	322.4	0.24	2370	{6,6,6,0,0,0} ^T

化硅组成的功能梯度材料,最上层材料为不锈钢,最下层材料为氮化硅,中间材料属性连续线性变化,不锈钢和氮化硅两种材料的物理属性及相关参数列入表 1。

计算过程中,采用了以下的无量纲参数:

$$\bar{x} = x/H, \bar{c} = c/c_0, \bar{\rho} = \rho/\rho_0, \bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$$

$$\bar{\varphi} = \varphi/\varphi_0, \tau_0 = \sqrt{\rho_0 H^2/c_0}, v_0 = H\lambda_0\varphi_0$$

式中 $H, c_0, \rho_0, \lambda_0, \varphi_0, \tau_0$ 和 v_0 为表示板的厚度, c_0 单位弹性常数,单位质量密度,单位热传导系数,单位温度变化热源, τ_0 为波穿过板厚的时间, v_0 为基本位移量。

采用 SEM 方法,竖向裂缝和竖向连接边界 b 将功能梯度板分隔成两个区域如图 1 所示,在每个域里,采用 SEM 方法分别对左右两个区域进行计算,两区域在连接处通过位移连续条件与应力关系连接起来。对于区域 I,由式(8)可知,在连接边界处有

$$\mathbf{R}_b^I = \mathbf{K}^I \mathbf{U}_b^I + \mathbf{S}_b^I - \mathbf{Q}_b^I \quad (19)$$

式中,上标罗马字母 I 表示方程作用控制域为区域 I, \mathbf{K} 为区域 I 内的刚度系数矩阵,向量 $\mathbf{R}, \mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{Q}$ 分别表示区域 I 右边竖直边界上的应力向量,位移向量,平衡应力向量和平衡热应力向量。式(19)可进一步写为子矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{cL}^I \\ \mathbf{R}_b^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^I & \mathbf{K}_{12}^I \\ \mathbf{K}_{21}^I & \mathbf{K}_{22}^I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{cL}^I \\ \mathbf{U}_b^I \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{cL}^I \\ \mathbf{S}_b^I \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{cL}^I \\ \mathbf{Q}_b^I \end{Bmatrix} \quad (20)$$

式中,下标 cL 为除裂缝尖端的裂缝左表面,下标 b 表示包括裂缝尖端的竖向连接处。

同样,对于区域 II,有

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_{cR}^{II} \\ \mathbf{R}_b^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{II} & \mathbf{K}_{12}^{II} \\ \mathbf{K}_{21}^{II} & \mathbf{K}_{22}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_{cR}^{II} \\ \mathbf{U}_b^{II} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_{cR}^{II} \\ \mathbf{S}_b^{II} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{cR}^{II} \\ \mathbf{Q}_b^{II} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

式中,下标 cR 为除裂缝尖端的裂缝右表面。

由于裂缝表面自由,所以

$$\mathbf{R}_{cL}^I = 0, \quad \mathbf{R}_{cR}^{II} = 0 \quad (22,23)$$

对于区域 I 和区域 II,由连续性条件有

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{R}_{cL}^I = \mathbf{R}_{cR}^{II} = 0 \quad (24)$$

$$\mathbf{R}_b = \mathbf{R}_b^I - \mathbf{R}_b^{II}, \mathbf{U}_b = \mathbf{U}_b^I - \mathbf{U}_b^{II} \quad (25)$$

所以,温度变化热源作用时,连接边界处的位移与应力关系可以表示为

$$\mathbf{R}_J = \mathbf{K} \mathbf{U}_J + \mathbf{S}_J - \mathbf{Q}_J \quad (26)$$

式中 \mathbf{R}_J 为作用于连接处和裂缝处的外力向量,具体表示为

$$\mathbf{R}_J = \{\mathbf{R}_{cL}^I, \mathbf{R}_{cR}^{II}, \mathbf{R}_b\}^T \quad (27)$$

式中 \mathbf{U}_J 为作用于连接处和裂缝表面处的位移向量,具体表示为

$$\mathbf{U}_J = \{\mathbf{U}_{cL}^I, \mathbf{U}_{cR}^{II}, \mathbf{U}_b\}^T \quad (28)$$

向量 \mathbf{S}_J 表示为

$$\mathbf{S}_J = \{\mathbf{S}_{cL}^I, \mathbf{S}_{cR}^{II}, \mathbf{S}_b^I - \mathbf{S}_b^{II}\}^T \quad (29)$$

向量 \mathbf{Q}_J 表示为

$$\mathbf{Q}_J = \{\mathbf{Q}_{cL}^I, \mathbf{Q}_{cR}^{II}, \mathbf{Q}_b^I - \mathbf{Q}_b^{II}\}^T \quad (30)$$

此项为考虑温度变化热源作用时的热应力项。

所以带竖向裂缝的功能梯度板的刚度矩阵 \mathbf{K} 可以通过左右两个区域的连接条件写为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^I & 0 & \mathbf{K}_{12}^I \\ 0 & \mathbf{K}_{11}^{II} & \mathbf{K}_{12}^{II} \\ \mathbf{K}_{21}^I & -\mathbf{K}_{21}^{II} & \mathbf{K}_{22}^I - \mathbf{K}_{22}^{II} \end{bmatrix} \quad (31)$$

求解方程(26)得到连接处的位移,从而可以确定未知系数 \mathbf{C} ,代入方程(7)得到带竖向裂缝的功能梯度板上的热响应。

4 结果及讨论

竖向裂缝的存在对功能梯度板的热响应产生了很大的影响。以下主要从裂缝距离温度热源不同

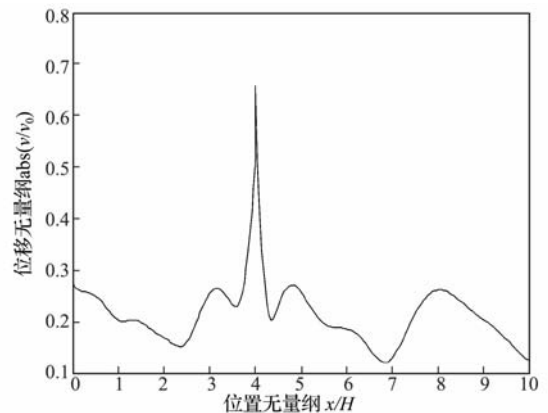


图 2 $d_c = 4H$ 时上层板热响应曲线图
Fig.2 Heat response while $d_c = 4H$

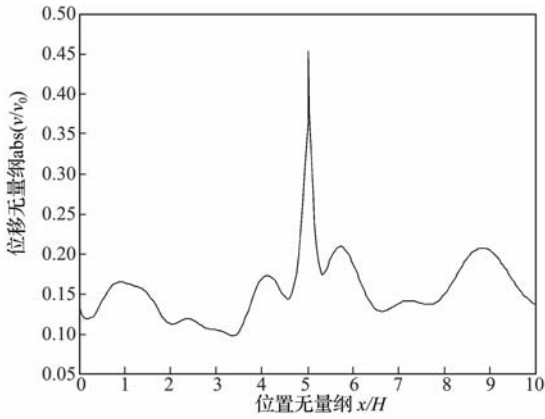


图 3 $d_c = 5H$ 时上层板热响应曲线图
Fig. 3 Heat response while $d_c = 5H$

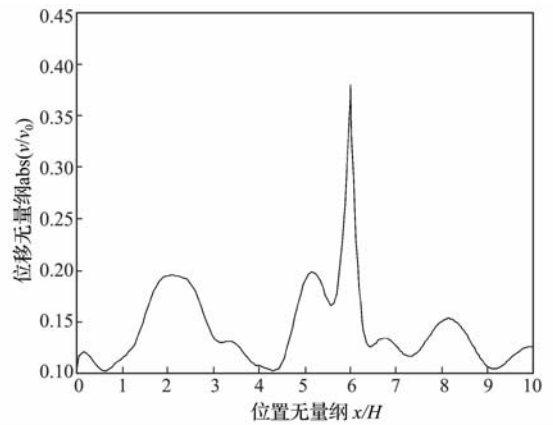


图 4 $d_c = 6H$ 时上层板热响应曲线图
Fig. 4 Heat response while $d_c = 6H$

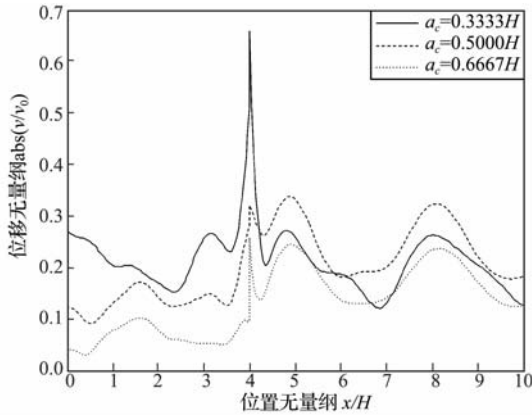


图 5 带不同长度裂缝时上层板热响应曲线图

Fig. 5 Heat response of upper plate with different length cracks 位置,不同裂缝的长度及不同频率的温度热源等情况下的热响应结果进行了研究分析。

考虑功能梯度板竖向裂缝位于 $4H$, $5H$ 和 $6H$ 三个不同位置时,上层板在 3.14 时刻时的竖向热响应分布如图 2 ~ 图 4 所示,此时裂缝的深度 $a_c = 0.3333H$,外部温度源频率 $\omega = 3.14$ 。从图中可以看出,当裂缝距离温度热源 $d_c = 4H$ 时,在 $4H$ 位置处上层板的热响应出现了不连续,此处的热响应出现了明显的尖点,这主要是由于竖向裂缝所引起的;当裂缝位置依次向后移动到 $5H$ 和 $6H$ 的位置时,上层板的热响应在这两个位置处也都依次出现了不连续,而且热响应依次出现了尖点。所以,当采用温度热源作用于板时,如果板上的热响应出现明显不连续及明显尖点的等现象,可以初步判断此板有缺陷,通过不连续的位置可以确定缺陷发生的位置。

继续考虑功能梯度板在 3.14 时刻,裂缝位于 $4H$ 处,热源频率 $\omega = 3.14$,带有不同长度裂缝的功能梯度上层板热响应曲线如图 5 所示,这里考虑了三种不同长度的裂缝($a_c = 0.3333H, 0.5000H,$

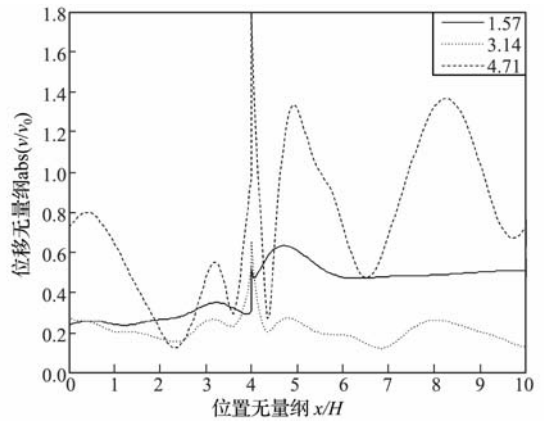


图 6 不同频率热源作用时上层板热响应

Fig. 6 Heat response of upper plate while temperature has different frequency

$0.6667H$)。从图 5 可以看出,当功能梯度板存在不同长度的裂缝时,热响应出现不连续的位置不变,不同的是功能梯度板上的热响应强度不同,竖向裂缝越长,板的热响应强度越弱。这主要是由于裂缝越长,其裂缝处的自由边界越长,从而削弱了功能梯度板上表面的热响应。

考虑功能梯度板在 3.14 时刻,裂缝位于 $4H$ 处,裂缝长度为 $0.3333H$,外部温度源取不同的加载频率时,得到了功能梯度上层板热响应曲线如图 6 所示,这里考虑外部温度热源取三种不同的频率($\omega = 1.57, 3.14, 4.71$)。从图 6 可以看出,随着温度热源的作用频率越大,功能梯度板上表面所产生的热响应波动特性越明显。

5 结 论

将条单元法成功地应用于具有竖向裂缝的功能梯度板的热响应分析中,分别对裂缝距离温度热源不同位置、不同裂缝的长度及不同频率的温度热源等情况下的热响应结果进行了研究分析,通过热

响应研究方法,可以确定竖向裂缝出现的位置及竖向裂缝的长度。为研究带裂缝的功能梯度板的热问题提供了新的方法参考,也为进一步考虑更复杂结构的缺陷研究提供了理论基础。

附 录:

$$c = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad \lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3]^T$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T, \quad L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_0 = \frac{1}{3h} \begin{bmatrix} 7D & -8D_{yy} & D_{yy} \\ -8D_{yy} & 16D_{yy} & -8D_{yy} \\ D_{yy} & -8D_{yy} & 7D_{yy} \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3(D_{xy} - D'_{yx}) - 4D_{xy} & D_{xy} \\ 4D_{xy} & 0 & -4D_{xy} \\ -D_{xy} & 4D_{xy} & -3(D_{xy} - D'_{xy}) \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \frac{h}{30} \begin{bmatrix} 4D_{xx} & 2D_{xx} & -D_{xx} \\ 2D_{xx} & 16D_{xx} & 2D_{xx} \\ -D_{xx} & 2D_{xx} & 4D_{xx} \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{\rho h}{30} \begin{bmatrix} 4I & 2I & -I \\ 2I & 16I & 2I \\ -I & 2I & 4I \end{bmatrix}$$

式中

$$D_{xx} = L_x^T c L_x = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} \\ -c_{13} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$$D_{yy} = L_y^T c L_y = \begin{bmatrix} c_{33} & c_{23} \\ -c_{23} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$D'_{xy} = L_x^T c L_y = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{12} \\ -c_{33} & c_{23} \end{bmatrix}$$

$$D'_{yx} = L_y^T c L_x = \begin{bmatrix} c_{13} & c_{33} \\ -c_{12} & c_{23} \end{bmatrix} = [D'_{xy}]^T$$

$$E = \begin{Bmatrix} I & 0 \\ 0 & A_2 \end{Bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} \Psi_{11} X_1 & \Psi_{12} X_2 & \cdots & \Psi_{1N} X_N \\ \Psi_{21} X_1 & \Psi_{22} X_2 & \cdots & \Psi_{2N} X_N \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Psi_{M1} X_1 & \Psi_{M2} X_2 & \cdots & \Psi_{MN} X_N \end{bmatrix}$$

式中

$$X_j = \exp(ik_j x)$$

$$B_S = \begin{Bmatrix} -\Gamma_3 \left(\Delta\varphi \frac{n-1}{N} + \varphi_1 \right) \\ -\Gamma_2 \left(\Delta\varphi \frac{n-1}{N} + \varphi_1 \right) \\ 0 \\ 0 \\ \Gamma_3 \left(\Delta\varphi \frac{n}{N} + \varphi_1 \right) \\ \Gamma_2 \left(\Delta\varphi \frac{n}{N} + \varphi_1 \right) \end{Bmatrix}, \quad B_{V_2} = \frac{1}{6} \begin{Bmatrix} \frac{\Delta\varphi}{N} \Gamma_3 \\ \frac{\Delta\varphi}{N} \Gamma_2 \\ 4 \frac{\Delta\varphi}{N} \Gamma_3 \\ 4 \frac{\Delta\varphi}{N} \Gamma_2 \\ \frac{\Delta\varphi}{N} \Gamma_3 \\ \frac{\Delta\varphi}{N} \Gamma_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Gamma_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11}\lambda_1 + c_{12}\lambda_2 + c_{13}\lambda_3 \\ c_{12}\lambda_1 + c_{22}\lambda_2 + c_{23}\lambda_3 \\ c_{13}\lambda_1 + c_{23}\lambda_2 + c_{33}\lambda_3 \end{Bmatrix}$$

参考文献 (References):

- [1] Al-Nassar Y N, Datta S K, Shah A H. Scattering of Lamb waves by a normal rectangular strip weldment[J]. *Ultrasonics*, 1991, **29**:125.
- [2] Karunasena W M, Shah A H, Datta S K. Plane-strain-wave scattering by cracks in laminated composite plates[J]. *ASCE J Eng Mech*, 1991, **117**:1738.
- [3] Karim M R, Awal M A, Kundu T. Elastic wave scattering by cracks and inclusions in plates: in-plane case[J]. *Int J Solids Struct*, 1992, **29**:2355.
- [4] Ahn V S, Achenbach J D, Kim J O. Numerical modeling of the V(z) curve for a thin-layer/substrate configuration[J]. *Res Nondestr Eval*, 1991, **3**:183-200.
- [5] Liu S W, Datta S K. Scattering of ultrasonic wave by cracks in a plate[J]. *ASME J Appl Mech*, 1993, **60**:352.
- [6] Liu S W, Datta S K, Ju T H. Transient scattering of Rayleigh Lamb waves by a surface-breaking crack: comparison of numerical simulation and experiment [J]. *J Nondestructive Evaluation*, 1991, **10**:11.
- [7] Datta S K, Ju T H, Shah A H. Scattering of an impact wave by a crack in a composite plate[J]. *ASEM J Appl. Mech*, 1992, **59**:596.
- [8] Serkan Dag. Thermal fracture analysis of orthotropic functionally graded materials using an equivalent domain integral approach [J]. *Engineering Fracture Mechanics*, 2006, **73**:2802-2828.
- [9] Thangjitham S, Choi H J. Thermal stresses in a multilayered anisotropic medium[J]. *Journal of Applied*

Mechanics, 1991, **58**:1021-1027.

- [10] Tanigawa Y, Matsumoto M, Akat T. Optimization problem of material composition for nonhomogeneous plate to minimize thermal stresses when subjected to unsteady heat supply[J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*, 1996, **62** (593):115-122.
- [11] Whitney J M, Pagano N J. Shear deformation in heterogeneous, anisotropic plates[J]. *Appl Mech*, 1970, **37**(4):1031-1036.
- [12] Liu G R, Xi Z C. *Elastic Waves in Anisotropic Laminates*[M]. CRC Press, 2002.
- [13] 田建辉, 韩旭, 孙小卫. 基于混合数值法的功能梯度材料板瞬态热响应分析[J]. 固体力学学报, 2008, **29** (4):396-401. (TIAN Jian-hui, HAN Xu, SUN Xiao-wei. Transient thermal response of functionally graded material plates based on the hybrid numerical method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2008, **29**(4):396-401. (in Chinese))
- [14] Han X, Liu G R, Xi Z C, et al. Transient waves in a functionally graded cylinder[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38** (17): 3021-3037.
- [15] Han X, Liu G R, Lam K Y. Transient waves in plates of functionally graded materials[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, **52**(8):851-865.
- [16] Han X, Xu D, Liu G R. Transient responses in a functionally graded cylindrical shell to a point load [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, **251**(5): 783-805.
- [17] Liu G R, Achenbach J D. Strip element method to analyze wave scattering by cracks in anisotropic laminated plates[J]. *ASME J Appl Mech*, 1995, **62**:607.
- [18] 田建辉. 功能梯度材料板热传导及热弹性研究[D]. 湖南大学, 2009. (TIAN Jian-hui. Investigation of the Heat Conduction and Thermoelasticity for Functionally Graded Material Plates[D]. Hunan University, 2009. (in Chinese))

The thermal response influence of vertical crack to FGM plates

TIAN Jian-hui^{*1,2}, HAN Xu², LONG Shu-yao³

(1. School of Mechatronic Engineering, Xi'an Technological University, Xi'an 710032, China;

2. State Key Laboratory of Advanced Design and Manufacturing for Vehicle Body,

Hunan University, Changsha 410082, China;

3. School of Mechanics and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The thermal response of functionally graded material (FGM) plates with vertical cracks has been investigated based on the strip element method (SEM). The material properties of the FGM plates vary continuously through the thickness. The thermal sources have been applied to the FGM plates with vertical cracks. The thermal responses are obtained by studying the different position of crack from heat source, different length cracks and different frequency of heat source. The thermal response studying for the FGM plates with vertical cracks using SEM provides some guidance for thermal problem.

Key words: functionally graded material plates; thermal response; strip element method