

代数多重网格方法在紊流数值预测中的应用

蒋光彪^{*1}, 何永森², 肖映雄³, 舒适²

(1. 中南林业科技大学 流变力学与材料工程研究所, 长沙 410004;
2. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湘潭 411105;
3. 湘潭大学 土木工程与力学学院, 湘潭 411105)

摘要:机械和矿山工程中广泛使用锥形渐扩管。将 DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型中非线性偏微分方程基于全隐式高精度迎风差分格式离散, 得到差分方程的系数矩阵为五对角块十三对角带状稀疏矩阵, 基于一种“三元组”方式进行压缩存储, 节约内存。提出了一种基于 DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型与代数多重网格方法结合的新算法, 阐述了代数多重网格方法的实施过程。对具有逆压梯度流动的锥形渐扩管内紊流进行了数值预测。数值实验表明, 代数多重网格方法对求解紊流模型离散方程组非常有效, 同此前该紊流数值模拟中使用的 Point-SOR 方法相比, 计算效率有了显著提高, 计算结果与实验结果吻合较好。

关键词:代数多重网格方法; 锥形渐扩管; 紊流; DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型; 稀疏矩阵
中图分类号: TP391.9 **文献标识码:** A

1 引言

在紊流数值计算中, Lander 等提出了“标准”型 $k-\epsilon$ 紊流模型^[1], 可用于对多种紊流场的数值预测, 文献[2]用该模型对室内空气场进行了数值仿真。机械和矿山工程中广泛使用的锥形渐扩管(又称扩压器、扩散器, 如图 1 所示)一类的内部紊流是一种复杂的逆压梯度流动, 用该模型进行数值预测比较困难。数值实验表明, 用适于锥形渐扩管路内紊流数值预测的近壁低雷诺数(DLR)型 $k-\epsilon$ 紊流模型 BFC 法(边界拟合曲线坐标变换法)^[3,4], 能以较高精度对锥形渐扩管内紊流进行数值预测。文献[5]提示了基于同位网格下求解 N-S 方程的快

速算法。代数多重网格方法(简称 AMG 方法)是一种求解大规模代数离散系统的快速算法, 适用于大规模科学工程计算。

本文提出了一种基于 DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型与 AMG 方法结合的新算法, 研究了 AMG 方法在锥形渐扩管内紊流数值仿真中的实施过程, 用有限差分法将该紊流模型之非线性偏微分方程组离散, 得到大规模稀疏线性代数方程组, 由 AMG 方法求解, 并与 Point-SOR(简称 SOR)方法相比较, 提高了数值计算效率。通过对应用实例的数值计算与实验结果比较验证了本算法的有效性。

2 基本方程组

采用椭圆型偏微分方程^[6]自动生成径向非均匀近壁密集型和边界正交化的贴体网格, 如图 2 所示。研究的流体为轴对称的锥形渐扩管内逆压梯度流动的紊流。在不影响计算精度前提下对流体做如下假定:(1) 流体为不可压粘性无旋流;(2) 各向同性;(3) 忽略重力影响。速度用入口速度 U_0 , 坐标用前接管直径 D_0 , 紊流动能用 U_0^2 , 紊流耗散率用 U_0^3/D_0 , 压力用 ρU_0^2 , 时间用 D_0/U_0 分别无量纲化, 则在柱坐标下, 物理平面内的无量纲化的 DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型的基本方程组为^[4]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} = 0 \quad (1)$$

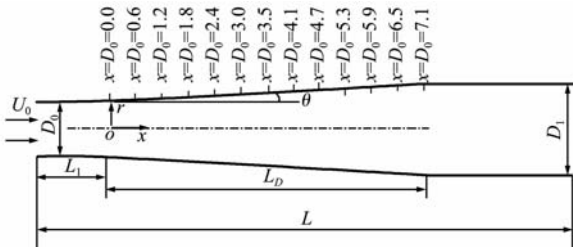


图 1 锥形渐扩管模型流路
Fig. 1 Model flow field in a conical diffuser

收稿日期:2008-11-28;修改稿收到日期:2009-11-14.
基金项目:国家自然科学基金(10771178, 10972191);湖南省自然科学基金(10JJ4004);湖南省科技厅一般项目(2009FJ3042)资助项目。
作者简介:蒋光彪*(1975-),男,博士,副教授 (E-mail:jiang_gb@163.com);
何永森(1941-),男,教授,博士生导师。

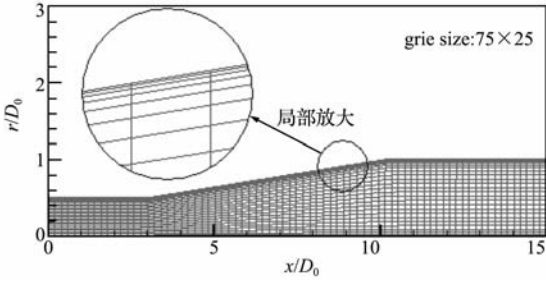


图2 物理平面内贴体网格

Fig. 2 Body-fitted grid in physical plane

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\bar{u}) = & \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right] + & \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] - & \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \bar{k} \right) & \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\bar{v}) = & \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right] + & \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \right] - & \\ \frac{2}{r} \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \frac{\bar{v}}{r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \bar{k} \right) & \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{k}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\bar{k}) = & \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\nu_t}{\sigma_1} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x} \right] + & \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\nu_t}{\sigma_1} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial r} \right] + G - \epsilon & \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\epsilon) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\bar{v}\epsilon) = & \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\nu_t}{\sigma_2} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + & \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\nu_t}{\sigma_2} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right] + & \\ C_1 \frac{\epsilon}{k} G - C_2 f_2 \frac{\epsilon^2}{k} & \quad (5) \end{aligned}$$

$$\nu_t = C_D f_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (6)$$

$$G = \nu_t \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\bar{v}}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$f_\mu = [1 - \exp(-y^+/70.)^2] (1 + 3.45/R_t^{1/2})$$

$$f_2 = 1 - \exp(-R_t^2)$$

式中 x 和 r 分别为轴向距离和离开轴心的径向距离, \bar{p} 为时均压力, \bar{u} 和 \bar{v} 分别为轴向, 径向时均速度

分量, ν_t 为涡动粘性系数, k 为紊流动能, ϵ 为紊流动能耗散率, Re 为雷诺数, f_μ 和 f_2 为模型函数, R_t 为脉动雷诺数, y^+ 为离壁面的无量纲距离, 模型常数取值为 $[C_D, C_1, C_2, \sigma_1, \sigma_2] = [0.09, 1.44, 1.92, 1.3]$ 。

3 数值方法

以下阐述基于 DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型与代数多重网格方法结合的数值方法对锥形渐扩管路内紊流数值仿真预测的实施过程。

3.1 DLR 型 $k-\epsilon$ 紊流模型方程组的离散

全部流动参数定义在同一网格点上, 将物理平面上的各方程化为计算平面上相应的等价方程, 基于有限差分方法和全隐式格式离散上述模型方程组。对于空间: 非线性的对流项用 3 阶迎风差分格式, 与边界相接的网格点用 2 阶迎风差分格式^[4], 其他项用 2 阶精度的中心差分; 对于时间项用 Euler-Backward 法。本方程组的各导数项分别离散化后, 所得差分方程组即为预测模型。对于 \bar{u} 方程, 其等价方程在计算平面上的十三点有限差分格式离散方程(略去时均符号“—”)为

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + u_\xi \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j} +}{12\Delta\xi} + & \\ |u_\xi| \frac{u_{i+2,j} - 4u_{i+1,j} + 6u_{i,j} - 4u_{i-1,j} + u_{i-2,j} +}{12\Delta\xi} + & \\ u_\eta \frac{-u_{i,j+2} + 8u_{i,j+1} - 8u_{i,j-1} + u_{i,j-2} +}{12\Delta\eta} & \\ |u_\eta| \frac{u_{i,j+2} - 4u_{i,j+1} + 6u_{i,j} - 4u_{i,j-1} + u_{i,j-2} =}{12\Delta\eta} & \\ - \frac{\partial p^n}{\partial x} + \left(\frac{1}{\text{Re}} + \nu_t \right) \left\{ \xi_{xx} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + \right. & \\ \eta_{xx} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta\eta} + \xi_x^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} + & \\ \eta_x^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} + & \\ 2\xi_x \eta_x \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} & \\ \xi_{rr} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + & \\ \eta_{rr} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta\eta} + \xi_r^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta\xi^2} + & \\ \eta_r^2 \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} + & \\ 2\xi_r \eta_r \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4\Delta\xi\Delta\eta} & \\ \left. \frac{1}{r} \left(\xi_r \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta\xi} + \eta_r \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) \right\} + & \end{aligned}$$

标变换,得到计算平面内的压力泊松导出方程如下:

$$\begin{aligned}
& -(\xi_{xx} + \frac{1}{r}\xi_r + \xi_{rr}) \frac{\partial p}{\partial \xi} - (\eta_{xx} + \frac{1}{r}\eta_r + \eta_{rr}) \frac{\partial p}{\partial \eta} - \\
& (\xi_x^2 + \xi_r^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - (\eta_x^2 + \eta_r^2) \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - (2\xi_x\eta_x + 2\xi_r\eta_r) \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} \\
& = -S_p \tag{9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_p = & \frac{D^n}{\Delta t} - [(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \bar{v}}{\partial r})^2 + 2\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}] + \\
& 2[\frac{\partial v_i}{\partial x} \nabla^2 \bar{u} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \nabla^2 \bar{v} + \\
& \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial r} (\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial r})] \tag{10}
\end{aligned}$$

3.2 DLR 型 k-ε 紊流模型方程组的求解

上述 DLR 型 k-ε 紊流模型方程组(1~6)有 6 个未知数,6 个方程,是封闭的模型方程组。用以上离散方法得到的差分方程的系数矩阵是有 13 条对角线的大型带状稀疏矩阵,采用一维三元数组压缩存储,用 AMG 方法^[8,9]和 SOR 方法求解,自适应控制内迭代的次数,设置内迭代的求解精度为 10⁻⁶,时间推进步数采用相邻两时间层解误差的离散 L2 范数

$$\sqrt{\sum_{i,j} (u_{old} - u_{new})^2 + (v_{old} - v_{new})^2} / \text{point } s < 10^{-5} \text{ 控制收敛。}$$

4 计算结果及分析

计算实例是总扩散角为 8° (半扩散角为 θ = 4°),扩散度为 4 的轴对称锥形渐扩管(图 1)内的不可压粘性逆压梯度紊流场,入口雷诺数为 1.16 × 10⁵ 和 2.93 × 10⁵,计算条件和边界条件见表 1。数值实验的硬件环境:hp dx2038M (Intel(R)) Pentium (R)4 CPU,3.06 GHZ,992 MB 内存;软件环境:Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0。

表 1 计算条件和边界条件

Tab. 1 Computational condition and boundary condition

名称	条件
数值方法	DLR 型 k-ε 模型·代数多重网格方法
Inflow B. C.	取 Laufer 的实验结果曲线数据 ^[10]
wall B. C.	$\bar{u}_{wall} = \bar{v}_{wall} = k_{wall} = 0, \epsilon_{wall} = \nu(\partial^2 k / \partial y^2)$ p_{wall} 用滑移条件,即: $\frac{\partial p}{\partial n} \Big _r = 0$
centerline B. C.	axis B. C.
outflow B. C.	Free outflow
时间步长	Δt = 0.001
网格规模	150 × 50

4.1 数值计算 CPU 时间的比较

在相同的数值实验环境及计算条件下,用 AMG 方法和 SOR 方法对该实例进行数值计算,所用 CPU 时间的比较见表 2(时间单位:百分秒,Re = 1.16 × 10⁵)。

表 2 AMG 与 SOR 求解的计算效率比较

Tab. 2 Comparison of computational efficiency between AMG and SOR

数值方法	内迭代次数	总 CPU 时间
SOR	自适应控制(精度 10 ⁻⁶)	1029078
AMG	自适应控制(精度 10 ⁻⁶)	725785
数值方法	每时间步 CPU 时间	收敛时无量纲时间
SOR	68	T = 15.1
AMG	51	T = 14.2

由表 2 可知,在外部条件相同的情况下,用 AMG 方法求解,与用 SOR 方法求解相比,可以节约近三分之一的 CPU 时间,显著提高了数值计算效率。

4.2 计算结果的比较

用 AMG 方法,ū 和 k 分布的计算结果分别如图 4 和图 5 所示,并且将其分别与 Okwuobi 和 Singh 的实验结果^[11,12] 比较。

由图 4 和图 5 可知,用 AMG 方法求解大型代数离散系统,设置求解精度为 10⁻⁶,用本紊流模型对实例求解,计算结果与实验结果吻合较好(由于每时间步求解精度相同,因此 AMG 方法与 SOR 方法对整个流场的数值模拟结果很接近,在图中分辨不出,故略去 SOR 的计算结果)。

取 Re = 2.93 × 10⁵,应用本文数值方法对锥形渐扩管路内全流场各流动参数的计算结果进行后处理,如图 6 和图 7 所示。由于流场轴对称,故取其

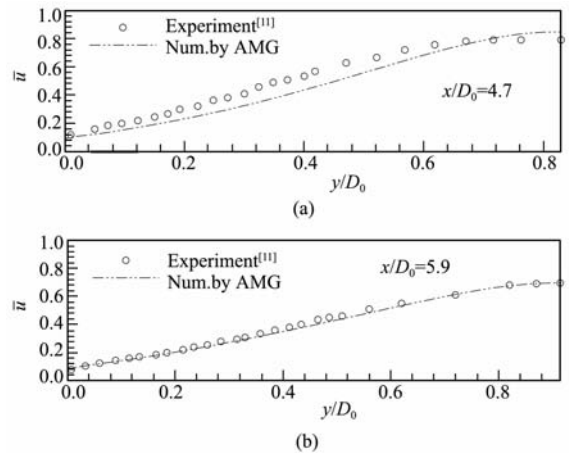


图 4 轴向时均速度分布的计算结果与实验结果的比较(Re = 2.93 × 10⁵)

Fig. 4 Comparison of longitudinal velocity profiles

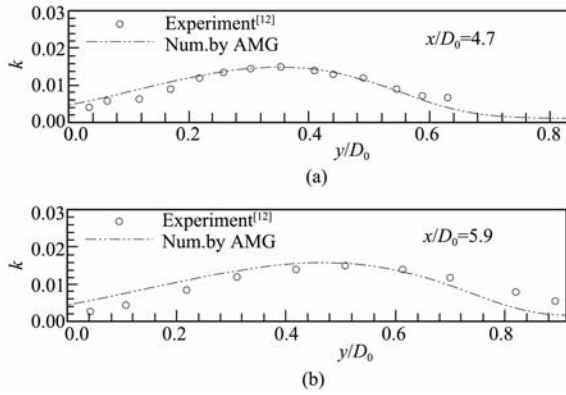


图 5 紊流动能分布的计算结果与实验结果的比较(Re = 1.16 × 10⁵)

Fig. 5 Comparisons of turbulent energy profiles

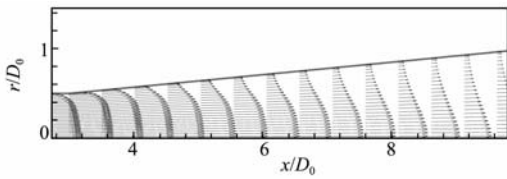


图 6 渐扩部分管路内壁面附近速度矢量分布图

Fig. 6 Velocity vectors profiles

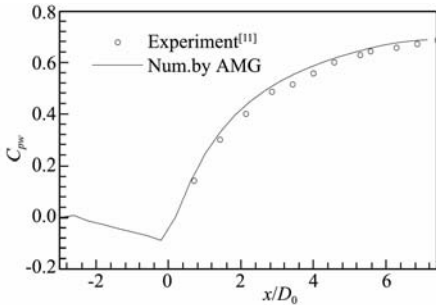


图 8 C_{pw} 的计算结果与实验结果的比较

Fig. 8 Comparisons of wall static pressure coefficients

一半计算和图示。

壁面压力系数是一个非常重要的参数,对于 C_{pw} 分布,根据实验条件及数据^[11],取前接管中距渐扩管入口 30.4 cm 处的断面为基准断面,壁面静压基准值为 P_{ref},其壁面静压为 P_w,则定义壁面压力系数为 C_{pw} = (P_w - P_{ref}) / [1/2ρU_{ref}²], U_{ref} 为基准断面的平均速度。对壁面压力系数的计算结果与实验结果的比较如图 8 所示。由图可知,对壁面压力系数的计算结果与实验结果比较接近。

5 结论

DLR 型 k-ε 紊流模型与代数多重网格方法结合,得出了紊流数值仿真的一种新方法,能高效和较精确预测锥形渐扩管内具有逆压力梯度的充分发展的不可压粘性紊流场,代数多重网格方法对于紊流数值仿真中出现的大规模带状稀疏矩阵的求解是有效的。基于 DLR 型 k-ε 紊流模型,在本文

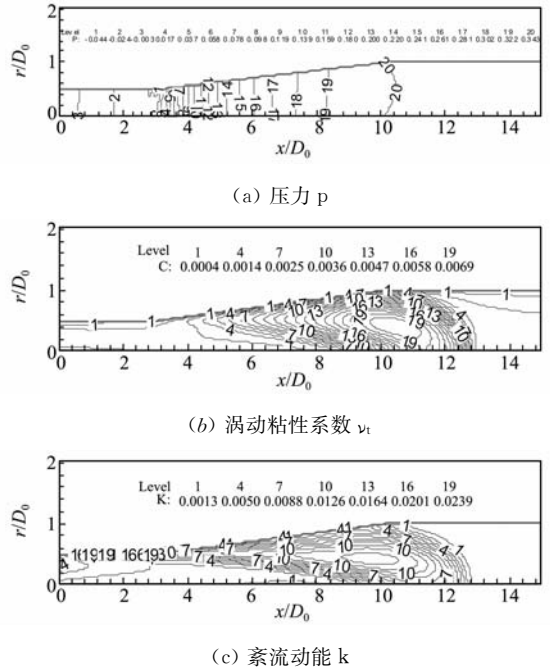


图 7 锥形渐扩管路内流动参数分布等值线图

Fig. 7 Contour map of flow parameters in a conical diffuser

的模型常数和模型函数条件下,每时间步,用代数多重网格方法对锥形渐扩管内紊流场数值计算,与 SOR 方法相比,可以显著提高计算效率,可节约近三分之一的 CPU 时间。该成果丰富了锥形渐扩管内紊流数值仿真诊断系统,利于机械、矿山和国防工程的实际应用。

参考文献(References):

[1] Lander B E, Spalding D B. *The Numerical Computation of Turbulent Flows*[M]. New York: North-holland Publishing Company, 1974.

[2] 栾 茹,李 锐,员 东 兆. 风速对室内气流分布影响的数值仿真[J]. 计算力学学报, 2009, **26**(1): 137-141. (LUAN Ru, LI Rui, YUAN Dong-zhao. Numerical simulation on influence of diffusion performance on airstream distribution in a room[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2009, **26**(1): 137-141. (in Chinese))

[3] He Y S, Liu S Y. Numerical Prediction of Turbulent Flows in a Conical Diffuser Using k-ε Model for Near-Wall and Low Re-Number[C]. The 4th Asian International Conference on Fluid Machinery, Suzhou, 1993.

[4] Jiang G B, He Y S, Shu S, et al. Numerical prediction of inner turbulent flow in conical diffuser by using a new five points scheme and DLR k-ε turbulent model[J]. *J Cent South Univ Technol*, 2008, **15**(s1), 181-186.

- [5] 徐涛,葛长江,李亦文,等.基于同位网格下求解N-S方程的快速算法[J].计算力学学报,2010,27(5):795-800. (XU Tao, GE Chang-jiang, LI Yi-wen, et al. A fast algorithm of solving N-S equation based on collocated grids[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, 27(5):795-800. (in Chinese))
- [6] Thompson J F, Thames F C, Mastin C W. Automatic numerical generation of body-fitted curvilinear coordinate system for fields containing any number of arbitrary two dimensional bodies[J]. *J Comp Phys*, 1974, 15:299-310.
- [7] 何永森,刘邵英.机械管内流体数值预测[M].北京:国防工业出版社,1999. (HE Yong-sen, LIU Shao-ying. *Numerical Prediction of Turbulent Flows Through Pipelines of Machinery*[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999. (in Chinese))
- [8] 舒适.几类基于部分几何和分析信息的代数多重网格法及其应用[D].湘潭大学,2004. (SHU Shi. Geometry-Analysis Based Algebraic Multigrid Methods and Applications[D]. Xiantan University, 2004. (in Chinese))
- [9] 肖映雄.代数多重网格算法研究及其在固体力学中的应用[D].湘潭大学,2006. (XIAO Ying-xiong. Study of Algebraic Multigrid Methods and Applications in Solid Mechanics[D]. Xiantan University, 2006. (in Chinese))
- [10] Laufer J. *The Structure of Turbulent in Fully Developed Pipe Flow*[M]. NACA Rep. 1174 Washington: U. S. Government Printing Office, 1955.
- [11] Okwuobi P A C, Azad R S. Turbulent in a conical diffuser with fully developed flow at entry[J]. *J Fluid Mech*, 1973, 57(3):603.
- [12] Singh D, Azad R S. Turbulent Kinetic Energy Balance in a Conical Diffuser[R]. Department of Mechanical Engineering University of Manitoba Winnipeg, Manitoba, Canada R3T, 2N2.

Application of algebraic multigrid method to the numerical prediction of turbulent flow

JIANG Guang-biao^{*1}, He Yong-sen², XIAO Ying-xiong³, SHU Shi²

(1. Institute of Rheological Mechanics and Material Engineering, Central South University of Forestry and Technology, Changsha, 410004, China;

2. School of Mathematics and Computational Science, Xiangtan University, 411105, China;

3. Civil Engineering and Mechanics College, Xiangtan University, 411105, China)

Abstract: A conical diffuser has been widely used in mechanical and mine engineering. DLR $k-\epsilon$ turbulent model is discreted by finite difference method. A full implicit difference scheme of high precision based on 13 points node stencil is constructed. Large sparse matrices with 13 diagonals are formed. The sparse matrices are compressively stored by three one-dimension arrays for saving memory. The algebraic multigrid method is a popular fast algorithm which is used to solve the discrete systems of differential equations. Numerical method of integrating the DLR $k-\epsilon$ turbulent model with the algebraic multigrid method are posed and the detailed implement process is given. Numerical experiments are shown that the computational efficiency is improved and the numerical results agree well with the experiment results.

Key words: algebraic multigrid method; conical diffuser; turbulent flow; DLR $k-\epsilon$ turbulent model; sparse matrix