

# 张力索杆结构最小势能分析方法与结构特性研究

陈务军\*, 杜贵首, 任小强

(上海交通大学 空间结构研究中心, 上海 200030)

**摘要:** 张力索杆结构为柔性多态体系, 计算方法复杂。本文基于势能最小化迭代建立平衡态的最小势能方法, 推导了体系势能、下降向量及步长列式, 建立势能最小化共轭梯度法迭代格式, 并用 VC++ 编程实现了算法。通过正交四边形网格索网数值分析算例验证了程序正确性, 并分析了新型六边形网格马鞍形双曲索网和索杆张拉整体结构的非线性荷载特性。研究表明最小势能迭代分析是一种有效的柔性张力结构非线性分析方法。

**关键词:** 张力索杆结构; 最小势能迭代法; 共轭梯度法

**中图分类号:** O21.1; TU351.3 **文献标识码:** A

## 1 引言

张力索杆结构为预应力柔性结构体系, 如索网、索穹顶及张拉整体等, 具有复杂的几何拓扑、力学性能, 由张力形成稳定形态、产生刚度和承受荷载。

Linkwitz 和 Schek<sup>[1]</sup> 提出的力密度法用于纯索网找形, 后扩展到索膜。Grundig<sup>[2]</sup> 提出带约束条件的充气膜力密度找形方法。Motro<sup>[3]</sup>, Tibert 和 Pellegrino<sup>[4]</sup> 等研究了力密度法应用于索杆张拉整体分析, Zhang<sup>[5]</sup> 提出自适应力密度法。

对张力索杆结构的非线性荷载分析, 国内普遍采用非线性有限元法<sup>[6-8]</sup>。动力松弛法在英国<sup>[9]</sup> 被广泛用于找形和非线性结构分析。Buchholdt H A<sup>[10]</sup> 直接应用最小势能原理迭代法进行非线性索网分析。杜贵首<sup>[11]</sup> 采用自适应力密度法研究了柔性张力索杆结构的找形, 并采用最小势能迭代方法进行了非线性分析以及柔性椭圆分析、弹性冗余度分析。本文以自适应找形分析方法和找形分析结果为基础, 仅涉及最小势能迭代法及非线性结构分析。

## 2 最小势能法

任意结构体系的总势能( $\Pi_p$ ) 为弹性变形势能和外力势能之和, 记<sup>[10-11]</sup>,

$$\Pi_p = \int_V [U(\epsilon_{ij}) + \phi(u_i)] dV - \int_{S_p} \Psi(u_i) dS \quad (1)$$

最小势能原理可表示为

$$\delta \Pi_p = 0 \quad (2)$$

最小势能原理一般表述为: 在所有可能位移中真实位移使势能取最小值, 反之, 使势能取得最小值的可能位移为真实位移。数学描述即总势能的一阶变分为零, 且二阶变分正定(大于零)。在张力结构非线性分析过程中用最小化总势能的方法来判定体系平衡, 当总势能达到最小值时结构达到平衡状态, 计算相应的节点坐标(位移) 和单元内力, 这就是最小势能法。

对一个自由节点  $i$ , 两自由度  $x_1$  和  $x_2$  体系, 总势能  $\Pi(x_1, x_2)$  可表示为二维环形等值线。节点  $i$  的平衡条件可表示为  $\partial \Pi / \partial x_{ij} = 0$ 。要到达势能  $\Pi$  最小位置, 可沿一个方向向量  $\mathbf{v}$  移动一段距离  $S\mathbf{v}$  到势能  $\Pi$  在这个方向上的极值点, 则移动的距离  $S$  有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = 0 \quad (3)$$

由此得到一个新的势能等值线的点, 由这一点可得到一个新的方向向量, 再重复以上方法最终可得到最小势能位置。这个方向向量  $\mathbf{v}$  称为势能下降向量, 这个距离  $S$  称为迭代步长。体系节点位移迭代格式为

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + S_k \mathbf{v}_k \quad (4)$$

式中  $\mathbf{x}_k$  和  $\mathbf{x}_{k+1}$  分别为第  $k$  步迭代时和迭代后的位移,  $\mathbf{v}_k$  为  $\mathbf{x}_k$  处势能下降向量, 而  $S_k$  为第  $k$  次迭代步长。

对多自由度( $n$ ) 体系, 其总势能及最小化过程

收稿日期: 2008-12-29; 修改稿收到日期: 2010-03-29.

基金项目: 国家自然科学基金(50878128)资助项目.

作者简介: 陈务军\* (1969-), 男, 教授, 博士生导师

(E-mail: cwj@sjtu.edu.cn).

与两自由度体系一致。

### 3 体系势能

多自由度( $n$ )体系的总势能可表示为

$$\Pi = U + V \quad (5)$$

式中  $U$  为应变能,  $V$  为外荷载势能。

对张力索杆体系, 全部单元为拉压杆, 仅考虑轴向应变能。假设索杆处于线弹性, 体系发生大位移几何非线性。

图 1(a) 为单元预应力态, 单元  $ij$  两节点  $i, j$  节点坐标矢量为  $\mathbf{X}_i$  和  $\mathbf{X}_j$ , 无应力长度  $l_{ij0}$ , 预应力  $T_{ij0}$ , 初始应变能  $U_0$ 。

图 1(b) 为单元荷载态,  $e$  为伸长量,  $x_n$  为节点位移,  $E$  和  $A$  为单元弹性模量和有效截面积。

系统总势能  $\Pi$  表达式为<sup>[10,11]</sup>,

$$\Pi = \sum_{m=1}^M \left( U_0 + T_0 e + \frac{EA}{2l_0} e^2 \right)_m - \sum_{n=1}^N F_n x_n \quad (6)$$

式中, 第一项为应变能,  $M$  为单元个数, 第二项为节点荷载作用下结构的势能,  $N$  为总自自由度数,  $F_n$  为节点荷载。

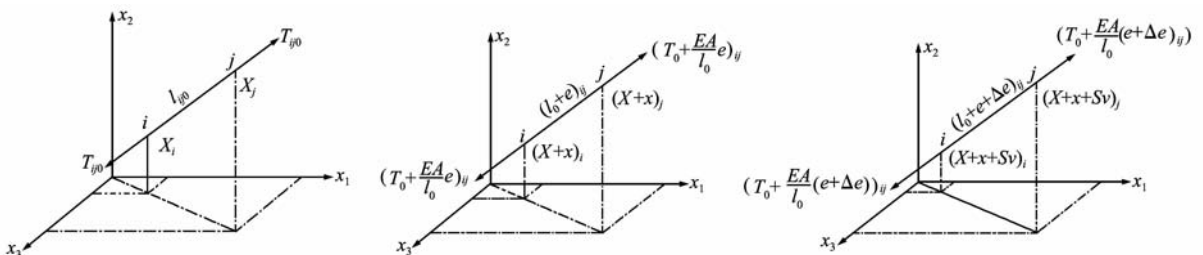
单元  $m$  两个节点为  $i$  和  $j$ , 式(6)中单元初始长度  $l_{m0}$  是初始状态下的两个节点  $i$  和  $j$  之间的距离, 令  $\mathbf{X}$  表示节点在初始状态下的坐标, 可推导单元  $m$  变形为

$$e_m = \frac{1}{l_{m0}} \sum_{k=1}^3 ((X_{jk} - X_{ik})(x_{jk} - x_{ik}) + \frac{1}{2}(x_{jk} - x_{ik})^2) \quad (7)$$

由此, 结构的总势能即可表示为节点坐标矢量和位移的函数。

在势能最小化迭代时位移增量为  $Sv$  时, 单元变形为  $\Delta e$ , 如图 1(c) 所示, 总势能可写为

$$\Pi = \sum_{m=1}^M \left( U_0 + T_0(e + \Delta e) + \frac{EA}{2l_0}(e + \Delta e)^2 \right)_m - \sum_{n=1}^N F_n(x + Sv)_n \quad (8)$$



(a) 单元预应力态

(b) 单元荷载态

(c) 迭代求解后单元状态

图 1 单元和节点变化

Fig. 1 Transformation of element and node state

如式(7), 单元变形可写为

$$(e + \Delta e)_m = \frac{1}{2l_{m0}} \sum_{k=1}^3 (2(X_{jk} - X_{ik})(x_{jk} + Sv_{jk} - x_{ik} - Sv_{ik}) + (x_{jk} + Sv_{jk} - x_{ik} - Sv_{ik})^2) \quad (9)$$

### 4 势能下降向量

在迭代过程利用势能梯度向量进行势能最小化。总势能的梯度可表示为势能对节点位移的偏导数, 因此, 将式(6)对第  $s$  个节点自由度的位移  $x_s$  进行微分, 可得其势能梯度向量在该自由度下的分量<sup>[10,11]</sup>,

$$g_s = \frac{\partial \Pi}{\partial x_s} = \sum_{m=1}^M \left( T_0 e + \frac{EA}{l_0} e \right)_m \frac{\partial e_m}{\partial x_s} - F_s \quad (10)$$

由式(7)对  $x_s$  进行微分, 略高阶项, 可得单元变形微分量:

$$\frac{\partial e_m}{\partial x_s} = \frac{-1}{l_{m0}} (X_{jk} - X_{ik} + x_{jk} - x_{ik}) \quad (11)$$

将式(11)代入式(10), 并整理得

$$g_s = - \sum_{m=1}^M (t_m (X_{jk} - X_{ik} + x_{jk} - x_{ik})) - F_s \quad (12)$$

式中  $t_m = (T_{m0} + \frac{EA}{l_m} e_m) / l_{m0}$ , 表示连接节点  $i$  和  $j$  的单元  $m$  的张拉系数(或力密度)。

一个标量的某一点的梯度指向标量增长最快的方向, 故下降向量可为总势能梯度向量的相反方向。最小化总势能的方法主要有最速下降法, 共轭梯度法和 Newton-Raphson 法。

### 5 共轭梯度法

共轭梯度法是将最速下降法得到的下降向量用上一次迭代中得到的向量进行正交化修正, 使之两两共轭, 提高收敛速度。共轭梯度法迭代格式为<sup>[10,11]</sup>,

$$\mathbf{v}_0 = -\mathbf{g}_0, \quad \mathbf{v}_k = -\mathbf{v}_k + \beta_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} \quad (13, 14)$$

式中

$$\beta_{k-1} = \mathbf{g}_k^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}) / \mathbf{v}_{k-1}^T (\mathbf{g}_k - \mathbf{g}_{k-1}) \quad (15)$$

表示共轭系数。对一般结构而言,其总势能方程总是二次位移函数,即

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x} - \mathbf{F}^T \mathbf{x} \quad (16)$$

此时,式(15)可用如下假定进行简化为

$$\beta_{k-1} = \mathbf{g}_k^T \mathbf{g}_k / \mathbf{g}_{k-1}^T \mathbf{g}_{k-1} \quad (17)$$

## 6 势能迭代步长

由式(3)可知,求步长  $S$  需将势能  $\Pi$  转化为关于步长  $S$  的函数。

将  $e + \Delta e$  更新单元变形  $e$ , 则单元变形  $e_m$  可表示为步长二次函数<sup>[10,11]</sup>,

$$e_m = (a_1 + a_2 S + a_3 S^2) / l_{j0} \quad (18)$$

式中

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 ((X_{jk} - X_{ik}) + \frac{1}{2}(x_{jk} - x_{ik}))(x_{jk} - x_{ik})$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^3 ((X_{jk} - X_{ik}) + (x_{jk} - x_{ik}))(v_{jk} - v_{ik})$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2}(v_{jk} - v_{ik})^2$$

将式(18)代入总势能  $\Pi$  式(6),可得关于步长  $S$  的多项式:

$$\Pi = C_4 S^4 + C_3 S^3 + C_2 S^2 + C_1 S + C_0 \quad (19)$$

式中

$$C_4 = \sum_{m=1}^M (EA a_3^2 / 2l_0^3)_m$$

$$C_3 = \sum_{m=1}^M (EA a_2 a_3 / l_0^3)_m$$

$$C_2 = \sum_{m=1}^M \left( \frac{T_0}{l_0} a_3 + EA (a_2^2 + 2a_1 a_3) / l_0^3 \right)_m$$

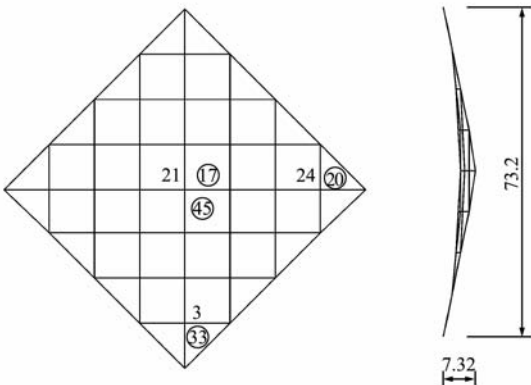


图 2 菱形索网简图  
Fig. 2 Square cable-net sketch

$$C_1 = \sum_{m=1}^M \left( \frac{T_0}{l_0} a_2 + EA a_1 a_2 / l_0^3 \right)_m - \sum_{n=1}^N F_n v_n$$

$$C_0 = \sum_{m=1}^M \left( U_0 + \frac{T_0}{l_0} a_1 + EA a_1^2 / l_0^3 \right)_m - \sum_{n=1}^N F_n v_n$$

方程(19)对  $S$  求导,有

$$4C_4 S^3 + 3C_3 S^2 + 2C_2 S + C_1 = 0 \quad (20)$$

方程(20)有 3 个解,但并不需求出 3 个解,仅求沿下降向量  $\mathbf{v}$  方向最近的稳定点所对应的值,故用牛顿近似解,可写为

$$S_{i+1} = S_i - \frac{d\Pi/dS}{d^2\Pi/dS^2} = S_i - \frac{4C_4 S_i^3 + 3C_3 S_i^2 + 2C_2 S_i + C_1}{12C_4 S_i^2 + 6C_3 S_i + 2C_2} \quad (21)$$

式中  $i$  为用牛顿法求解时迭代次数,而  $S_{i=0}$  设为 0。由式(21)可知在实际求解过程中不需要求解  $C_0$ 。

由式(14,21)可计算出下降向量  $\mathbf{v}_k$  和步长系数  $S_k$ ,在迭代过程中,求解总势能梯度还需要更新张拉系数  $t_m$ ,由式(18,12)有

$$t_m = \left( \frac{T_0}{l_0} + \frac{EA}{l_0^3} (a_1 + a_2 S + a_3 S^2) \right)_m \quad (22)$$

至此,迭代求解位移向量的参数全求出,则由式(4)可计算出第  $k+1$  次迭代的位移  $\mathbf{x}_{k+1}$ 。

## 7 数值分析与结构特性

根据本文算法,采用 VC++ 编制了最小势能迭代法非线性结构分析程序<sup>[11]</sup>。

(1) 四边形网格马鞍形双曲索网

图 2 为索网周边为刚性支撑,主副索对称,主索同  $x$  方向,副索同  $y$  方向,网格初始尺寸 9.15 m,

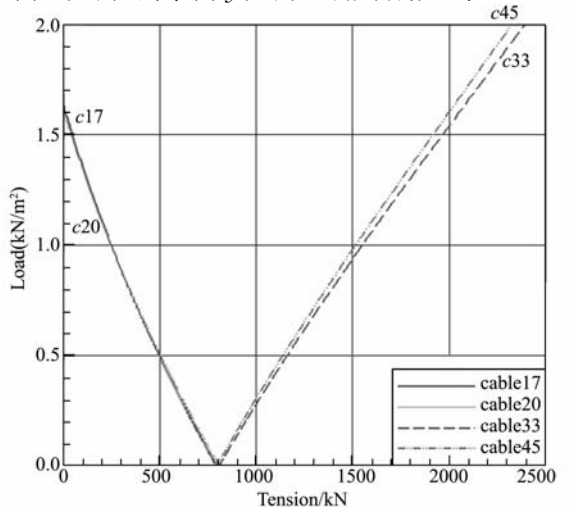


图 3 单元内力-荷载曲线  
Fig. 3 Cable tension with respect to load

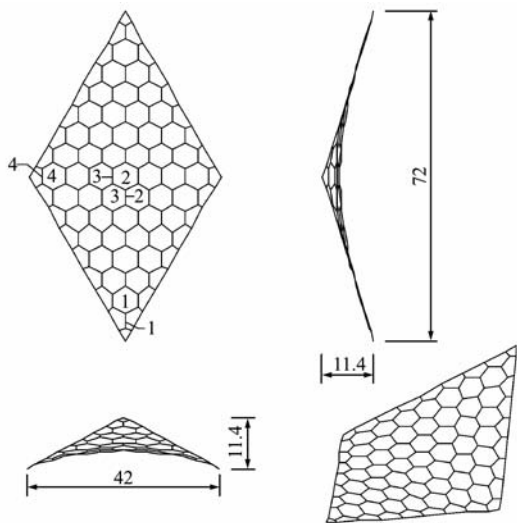


图 4 六边形网格索网简图

Fig. 4 Hexagonal mesh of cable-net sketch

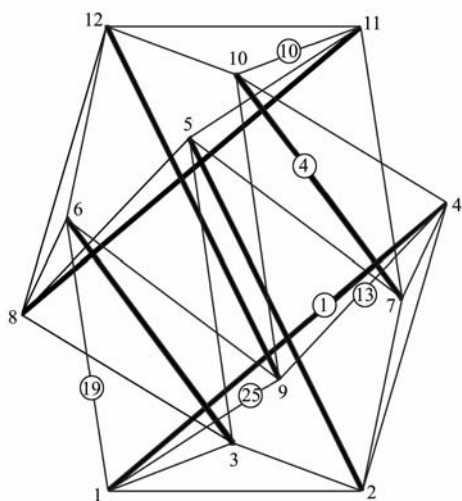


图 6 张拉整体结构模型图

Fig. 6 Tensegrity module sketch

由力密度法(力密度值 10 kN/m)找形得平衡曲面。设索刚度  $EA = 293600$  kN,找形后各索的预张力为  $T = 800$  kN。节点 3 和单元 33、45 处于主索,节点 24 和单元 20、17 处于副索。

在索网按荷载增量法加载至  $2.0$  kN/m<sup>2</sup>,图 3 为荷载索张力曲线,与文献[6]一致。在正常活荷载下,荷载位移呈近似线性,荷载索张力呈弱非线性,悬索张力增大,稳定索张力减小。

### (2) 六边形网格索网

图 4 菱形索网,网格为六边形,跨度为  $72 \times 42$  m,高差为  $11.4$  m,各索刚度  $EA = 293600$  kN,预张力约为  $T = 800$  kN(力密度为  $267$  kN/m),由力密度找形<sup>[11]</sup>。

如图 5(曲线 C1~C4 对应 Cable1~Cable4,在图 4 中有引线数字对应索及编号),索张力增大,先

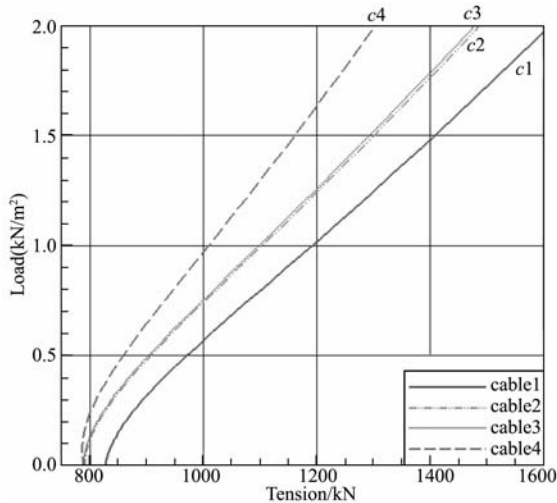


图 5 单元内力-荷载曲线

Fig. 5 Cable tension with respect to load

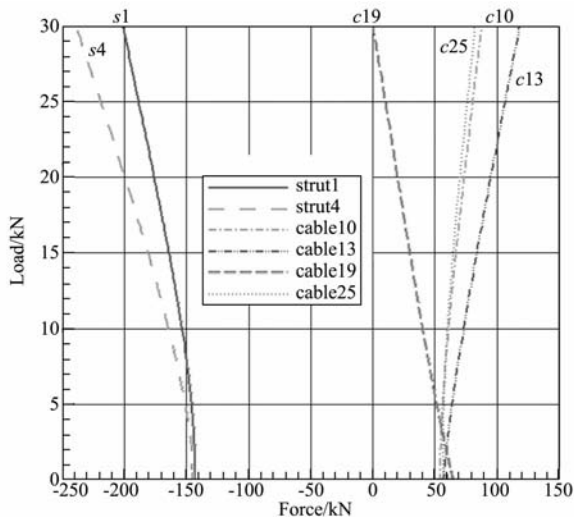


图 7 单元内力随压力荷载变化曲线

Fig. 7 Element force with respect to compression load

缓慢之后加快,最后增长趋于线性。这是因六边形索网格空间各向同性、索单元独立。在荷载作用变形时,各网格都往外扩散,使得单元拉伸,从而索张力均增大。

### (3) 张拉整体结构

图 6 张拉整体结构,细线为拉索( $EA = 20000$  kN)、粗线为压杆( $EA = 50000$  kN),节点 7、4、10 三层三角形高度分别为  $3.0$  m、 $6.0$  m、 $9.0$  m,三角形 1-2-3 和 10-11-12 边长  $5.196$  m。采用自适应可行力密度法找形得平衡形态,首先给定 6 个压杆初始力密度:  $\{-10, -10, 10, 10, 10, 10\}$ ,求得可行力密度为  $\{-15.5862, -15.5862, 1.03908, 10.3908, 10.3908, 10.3908\}$ ,并指定一组独立节点坐标(1、2、3、9)<sup>[11]</sup>。在找形分析时结构为无任何外部约束。

在结构分析时首先约束节点 1-2-3,在 4~12 自由节点施加相同竖向节点荷载。当荷载为压力时,单元内力-荷载曲线如图 7 所示。在荷载作用

下,大部分拉索张力也增大,而压杆压力增大,这验证了张拉整体结构的恒定应力态特性。

## 8 结 语

本文基于势能最小化迭代建立平衡态的最小势能方法,推导了体系势能、下降向量、步长显式列式,建立势能共轭梯度法迭代格式(位移增量、张力系数),并用 VC++ 编程实现了算法。最后通过计算分析研究了正交网格、六边形网格马鞍形双曲索网以及张拉整体结构特性,验证了张力结构复杂非线性、恒定应力态特征。研究表明最小势能迭代法是柔性张力结构非线性分析的有效方法。

## 参考文献(References):

[1] Schek H J. The force density method for form-finding and computation of general network[J]. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 1974, **1**(3):115-134.

[2] Grundig L. Minimal surfaces for formfinding forms of structural membranes[J]. *Computer and Structures*, 1988, **30**(3):679-683.

[3] Motro R. Tensegrity: Structural Systems for the Future[M]. London: Hermes Science Publishing Limited, 2003.

[4] Tibert A G, Pellegrino S. Review of form-finding methods for tensegrity structures[J]. *International Journal of Space Structures*, 2003, **19**(4):209-223.

[5] Zhang J Y, Ohsaki M. Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, **43**(18-19):5658-5673.

[6] 沈世钊,徐崇宝,等.悬索结构设计(第2版)[M].北京:中国建筑工业出版社,2006. (SHEN Shi-zhao, XU Chong-bao, et al. *Design of Cable Structures (2<sup>nd</sup> edition)* [M]. Beijing: China Building Industrial Press, 2006. (in Chinese))

[7] 陈务军.膜结构工程设计[M].北京:中国建筑工业出版社,2005. (CHEN Wu-jun. *Membrane Structures Engineering Design* [M]. Beijing: China Building Industrial Press, 2005. (in Chinese))

[8] 钱若君,杨联萍.张力结构的分析·设计·施工[M].南京:东南大学出版社,2003. (QIAN Ruo-jun, YANG Lian-pin. *Analysis, Design and Construction of Tension Structures* [M]. Nanjing: Southeast University Press, 2003. (in Chinese))

[9] Lewis W J. The efficiency of numerical methods for the analysis prestressed nets and pin-jointed frames structures [J]. *Computer and Structures*, 1989, **33**(3):791-800.

[10] Buchholdt H A. *An Introduction to Cable Roof Structures* [M]. Cambridge University Press, 1999.

[11] 杜贵首.张力结构的柔性分析[D].上海交通大学, 2008. (DU Gui-shou. *Flexibility Analysis of Cable and Strut Tension Structures* [D]. Dissertation of Shanghai Jiaotong University, 2008. (in Chinese))

## Minimization iteration procedure of potential energy and structural analysis for the tension cable-strut structure

CHEN Wu-jun\*, DU Gui-shou, REN Xiao-qiang

(Space Structure Research Centre, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030)

**Abstract:** The tension cable-strut structure features flexibility, nonlinearity, and morphology complex nature. This needs complicated state transformation and computational algorithm for structural analysis. On the basis of minimization iteration procedure of potential energy, the equilibrium was developed through iteration method. The potential energy, decent vector of potential energy minimization and incremental iteration step-length were formulated sequentially. The iteration procedure was formulated with Conjugate Gradient of potential energy minimization, and the program was developed accordingly with VC++. The program was proved correct through numerical verification of a typical orthogonal square cable-net structure. The load-capacity and deformation performance were investigated for a novel hexagonal cable-net and a novel two-story tensegrity structure respectively. The minimum potential energy iterative method was demonstrated effective for the nonlinear structural analysis of flexible cable-strut structure.

**Key words:** tension cable-strut structure; minimization iteration of potential energy method; conjugate gradient method