

# 求解力电耦合方程的控制弧长法

杨小斌<sup>\*1</sup>, 周又和<sup>2</sup>, 王晓军<sup>1</sup>

(1. 常州工学院 机电工程学院, 常州 213002; 2. 兰州大学 土木工程与力学学院, 兰州 730000)

**摘要:** 静电作用下的柔性薄板是微机械的核心部件, 其控制方程是变形控制方程和静电平衡方程构成的一组非线性耦合方程。本文在分别给出求解这两组方程数值方法的基础上, 把控制弧长法进行了合理的推广, 变直接加载电压为由构型控制的电压加载方式。结果表明这种方法不仅能够克服收敛性难的问题, 而且能够得到致动板吸入失稳后的构形。算例还表明用本方法计算的吸入临界值要比用解析模型得到的临界值更接近实验值。

**关键词:** 微机械; 力电耦合; 控制弧长法

**中图分类号:** O343; O442 **文献标识码:** A

## 1 引言

在众多微机械当中, 把柔性薄板作为致动元件, 利用它在静电力作用下的变形获得比较大的输出力和尽可能大的可控微位移, 一直是微机械设计的追求<sup>[1]</sup>。为了获得比较大的微位移, 薄板要经历两个阶段的变化, 首先是薄板在静电力作用下发生弯曲变形, 其次当外加电压达到一个临界值以后发生吸入失稳 (pull-in)<sup>[2]</sup>, 薄板与基板发生接触, 随电压增加薄板与基板沿长度方向的接触长度也随之增加<sup>[1,3]</sup>。这是一个静电场与变形场相互耦合的问题, 静电力的大小与导体表面的电荷密度相关, 而电荷密度是由导体表面的曲率决定的, 同时随变形的增加非线性也会越来越强。

在已有的研究中, 一般按薄板发生弯曲变形和接触两个阶段进行研究<sup>[3,4]</sup>。在处理静电力时理论分析也分成两部分<sup>[4]</sup>, 当板的变形比较小时, 假定电荷是均匀分布的, 静电力是一个均布载荷, 当变形比较大时电荷集中在曲率比较大的导体表面, 这时假定静电力是一个集中力, 处于两者之间的情形用它们的加权平均<sup>[1]</sup>, 这种处理方式在计算静电力时存在比较大的误差, 而且难以考虑静电力的边界效应, 而在柔性薄板中静电力的边界效应是比较大的。由于静电力与薄板变形直接相关, 而且变形越大静电力和变形的非线性越强, 解析模型的结果和实验结果的差别也越大, 在数值模拟中随非线性

的增强收敛性会比较差, 计算精度会越来越低。吸入临界值的计算会与实验结果有比较大的差异<sup>[1]</sup>, 而且解析模型只能对致动板形状比较规则的情形进行计算。

控制弧长法在结构的后屈曲求解中是一种常用的非常有效的算法<sup>[5]</sup>。本文从求解静电场的矩量法和求解薄板变形的增量有限元法入手, 把控制弧长法推广到对这一力电耦合方程的求解中, 并给出了两个算例, 从算例中可以看到这种推广的正确性, 算例中得到的吸入临界失稳值更接近实验值, 而且可以对致动板从稳定到不稳定进行描述。

## 2 基本方程

对于在静电力作用下的柔性薄板, 其控制方程有两个: 一个是控制变形的静力方程, 一个是计算电荷分布的静电方程。

### 2.1 致动板变形的增量有限元法

薄板变形无论是否考虑非线性因素, 其有限元控制方程总可以写成增量形式<sup>[6]</sup>:

$$K w = Q - P = R \quad (1)$$

式中  $K$  是刚度矩阵, 对于非线性问题它是位移的函数,  $w$  是位移增量,  $Q$  是节点的电场力,  $P$  是节点内力,  $R$  是残余节点力。达到平衡状态的位移可表示为

$$w^j = w^{j-1} + \sum_{i=1}^m w_i^j \quad (2)$$

式中  $j$  表示增量步,  $i$  表示迭代步, 对于线性问题  $m = 1$ , 对于非线性问题  $m$  是满足精度要求  $|w_i^j| <$  的迭代次数。

收稿日期: 2007-06-28; 修改稿收到日期: 2008-03-28

作者简介: 杨小斌<sup>\*</sup> (1972-), 博士

(E-mail: yangxb@lzu.edu.cn).

### 2.2 静电场分析的矩量法

在导电板上施加静电电压时,板的表面就会产生分布电荷。由静电学理论,表面电荷密度与板的表面形状有关。记矢量  $r$  为此电荷密度所在的源点,  $r$  为相应产生电场的场点,可以写出电场分布与面电荷之间的关系,其积分形式的控制方程为<sup>[7]</sup>

$$U(r) = \frac{1}{4\pi k} \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dS \quad (r \in S) \quad (3)$$

和边界条件:

$$U = \dot{U} \quad (r \in S) \quad (4)$$

式中  $\rho$  是面电荷密度,  $U$  表示电势函数,  $\dot{U}$  为在边界上施加的已知电势,  $k$  是相对介电常数,  $\epsilon_0$  是自由空间的介电常数,  $S$  是已知电势的空间区域,  $S$  表示待求电势的空间区域。对于静电积分方程(3)和(4)采用矩量法,离散后的代数方程为<sup>[8]</sup>

$$C(w) D = U \quad (5)$$

式中  $C$  是电位移矩阵,它是致动板位移的函数,  $D$  是极板表面面电荷密度矩阵,  $U$  是外加电压矩阵。

### 2.3 静电力计算方程

由静电物理学,导体表面附近的电场力可用下式计算:

$$q^e = \frac{\epsilon}{2\epsilon_0} n \quad (6)$$

式中  $n$  是垂直于导体表面的法向单位矢量,  $\epsilon_0$  是真空中介电常数,  $\epsilon$  是导体表面的电荷密度,  $q^e$  是导体表面的电场力集度。

## 3 控制弧长法

采用增量加载方式,引入控制增量加载因子,式(5)可写为

$$C(w) D = U + \lambda U \quad (7)$$

式中  $\lambda U$  是参考增量电压。对于每一个增量步引入 Riks<sup>[9]</sup> 法则进行控制,即令

$$w_i^T w_i + \lambda_i \lambda_i = s^2 \quad (i = 1) \quad (8)$$

$$w_i^T w_i + \lambda_i \lambda_i = 0 \quad (i > 1) \quad (9)$$

式中  $s$  是控制弧长,  $w_i$  是每一个增量步当中第一个迭代步的位移,  $\lambda_1$  和  $\lambda_i$  分别为第一个迭代步和第  $i$  个迭代步的加载因子。由式(7)可把电荷密度矩阵分两步计算:

$$C(w)^j D^j = U^j, \quad C(w)^i D^i = U \quad (10, 11)$$

总的电荷密度矩阵变为

$$D = D^j + \lambda_i D^i \quad (12)$$

把式(12)代入式(6)得到:

$$q_i^e = q_i^{e(1)} + \lambda_i q_i^{e(2)} + \lambda_i^2 q_i^{e(3)} \quad (13)$$

式中

$$q_i^{e(1)} = \frac{1}{2\epsilon_0} D_i^j, \quad q_i^{e(2)} = \frac{1}{\epsilon_0} D_i^j D_i^j, \quad q_i^{e(3)} = \frac{1}{2\epsilon_0} D_i^j \quad (14)$$

节点电场力矩阵也可以分成三部分,式(1)改写为

$$K w_i = Q_{(1)} + \lambda_i Q_{(2)} + \lambda_i^2 Q_{(3)} - P \quad (15)$$

与分解电荷密度矩阵的方法相同,每一个迭代步位移的计算可分三块计算,即

$$K w_{(1)} = Q_{(1)} - P \quad (16)$$

$$K w_{(2)} = Q_{(2)}, \quad K w_{(3)} = Q_{(3)} \quad (17, 18)$$

最终每一个迭代步的位移为

$$w_i = w_{(1)} + \lambda_i w_{(2)} + \lambda_i^2 w_{(3)} \quad (19)$$

把式(19)代入式(9)得到:

$$a \lambda_i^2 + b \lambda_i + c = 0 \quad (20)$$

式中

$$a = w_{(1)}^T w_{(3)}, \quad b = w_{(1)}^T w_{(2)} + w_{(2)}^T w_{(1)}, \quad c = w_{(1)}^T w_{(1)} \quad (21)$$

## 4 算例

**算例 1** 抓爬式微机械的致动元件一般简化为一个受静电力作用的悬臂梁,在文献[1]中采用参数:  $a = 75 \mu\text{m}$ ,  $b = 65 \mu\text{m}$ ,  $g = 2.1 \mu\text{m}$ ,  $Y = 168 \text{ GPa}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ , 空气中的相对介电常数  $k_{\text{air}} = 1$ , 氮化硅的相对介电常数  $k_{\text{nitride}} = 5.7$ , 由于空气层的厚度为  $g_{\text{air}} = 1.5 \mu\text{m}$ , 绝缘层氮化硅的厚度  $g_{\text{nitride}} = 0.6 \mu\text{m}$ , 文献[2]的解析模型取  $k = 1.5$ 。

图 1 给出了自由端位移随电压的变化曲线,当外加电压小于 15V 时本文结果与文献[1]的结果一致,但随着外加电压的增大,本文结果与文献[1]的差别越来越大,吸入临界值相差 9V。原因在于文

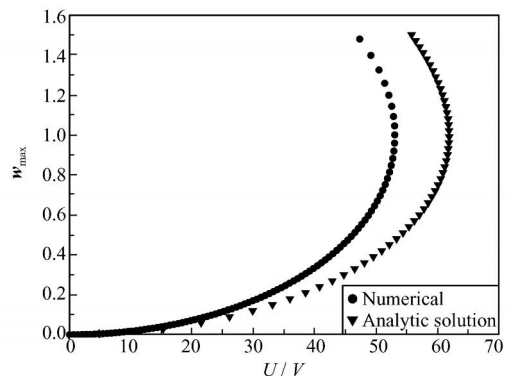


图 1 最大位移随电压的变化曲线

Fig. 1 The maximum transverse displacement versus the voltage

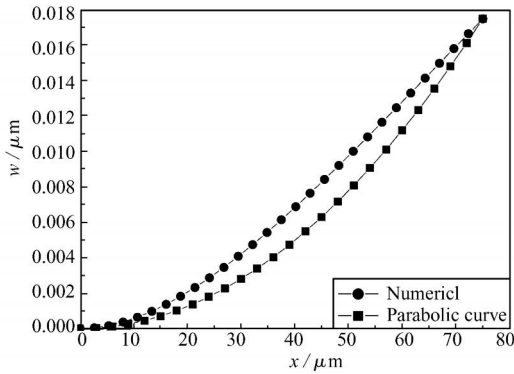


图 2  $\dot{U} = 10 \text{ V}$  时致动悬臂板的变形图  
Fig. 2 Deformation profile of actuating plate

献[1]中,用一个位移零点在固定端,梁的自由端位移为抛物线上另外一点的二次曲线代替致动板的真实变形,由图 2 所示外加电压  $\dot{U} = 10 \text{ V}$  时文献[1]理论计算采用的梁的变形与本文的数值结果比较来看,用这样的二次曲线代替致动板的真实变形可能增加了梁的刚性,最终使得临界吸入值偏大。但从文献[1]给出的致动板与氮化硅发生接触的实验数据来看,发生接触的实验值在  $50 \text{ V} \sim 55 \text{ V}$  之间,本文得到的吸入临界值为  $53 \text{ V}$ ,比文献[1]给出的解析模型更接近临界值。

**算例 2** 蠕动爬行微机械的致动元件是一个一端夹支一端可移夹支的柔性板<sup>[3]</sup>,其参数为  $a = 200 \mu\text{m}$ ,  $b = 100 \mu\text{m}$ ,  $g = 2.1 \mu\text{m}$ ,  $Y = 150 \text{ GPa}$ ,  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ , 空气中的相对介电常数  $k = 1$ 。

图 3 给出了在上述参数情形下最大位移随外加电压的变化曲线。可以看到本文方法也能计算出随外加电压变化致动薄板经历的从弯曲变形到吸入失稳的过程,而且随基板间隙的增加吸入临界值增加,给出的稳定和 unstable 区域的划分范围与文献[2]解析模型的近似。

## 5 结论

本文把传统的控制弧长法进行了推广,用来求解微机械当中的机电耦合方程,算例表明采用本方法不仅能得到微机械的稳定区域,还能得到不稳定区域,得到的吸入临界值更接近实验值。同时本方法对于计算复杂结构机电耦合问题也有一定的参考价值。

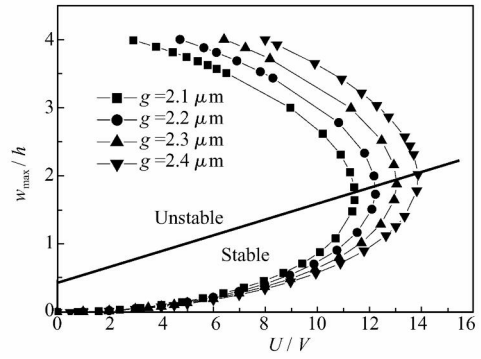


图 3 最大位移随电压的变化曲线  
Fig. 3 The maximum transverse displacement versus the voltage

## 参考文献(References):

- [1] LIJ, BROWN G, UTTAMCHANDANI D. Flexing of scratch drive actuator plates: modeling and experimentation[J]. *IEE Proc-Sci Meas Technol*, 2004, **151** (3): 137-141.
- [2] YANG F. Electromechanical instability of microscale structures[J]. *J Appl Phys*, 2002, **92** (5): 2789-2794.
- [3] Niels Tas, Jeroen Wissink, Louis Sander, Theo Lammerink, Miko Elwenspoek Modeling, design and testing of the electrostatic shuffle motor[J]. *Sensors and Actuators A*, 1998, **70**: 171-178.
- [4] BRUCE R D, CHRISTOPHER G Levery, Craig D. M., Daniela R. and Mike S. Power delivery and locomotion of untethered micro-actuator [G]. *IEEE MEMS*. Japan: Wiley-IEEE Press, 2003: 124-129.
- [5] SIMO J C, WRIGGERS P, SCHWEIZERHOF K H, et al. Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints[J]. *Int J for Numerical Methods in Engineering*, 1986, **23**: 779-800.
- [6] 蒋友谅. 非线性有限元法[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1988. (JIANG You-liang. *Nonlinear Finite Element Method*[M]. Beijing: Beijing Polytechnic University Press, 1998. (in Chinese))
- [7] SMYTHE W R. *Static and Dynamic Electricity*[M]. New York: McGraw-Hill, 1968.
- [8] 盛剑霓, 等. 电磁场数值分析[M]. 北京: 科学出版社 1984. (SHEN G Jian-ni, et al. *Numerical Analysis on Electromagnetic Field* [M]. Beijing: Science Press, 1984. (in Chinese))
- [9] KLEIBER M. *Incremental Finite Element Modeling in Non-linear Solid Mechanics*[M]. New York: Halsted Press, 1988.

## The arc-length method for solving the coupled equation of mechanics-electricity

YANG Xiao-bin<sup>\*1</sup>, ZHOU You-he<sup>2</sup>, WANG Xiao-jun<sup>1</sup>

(1. School of Mechanical & Electrical Engineering, Changzhou Institute of Technology, Changzhou 213002, China;

2. College of Civil Engineering and Mechanics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, China)

**Abstract:** Flexible plate subjected to static electric force is a key component of MEMS. And its governing equation is a group of nonlinear coupled equation consisted of static equilibrium equation and static electric equilibrium equation. On the based of giving the means of solving these equations, that the arc-length method is generalized result in loading pattern change that turn directly loading voltage into indirectly loading voltage by deflection control. It is shown that the method not has the excellent convergence but be able to give the deformation after pull-in. Numerical examples show that pull-in threshold calculated by this method is more agreement with experiment value than analytical model.

**Key words:** MEMS; the coupled mechanics-electricity; arc-length method

## 宏微观岩土力学与岩土技术国际研讨会论文征集一号通知

宏微观岩土力学与岩土技术国际研讨会将于 2010 年 10 月 10 日在上海举行。本会议旨在对宏微观土力学与岩土技术进行国际交流研讨,反映土的宏微观特性、离散单元法数值模拟、岩土工程应用技术的最新国际研究成果与发展趋势,会议将特邀国内外著名专家学者做专题学术报告,出版正式论文集,此外国际 SCI 源期刊 Granular Matter 将刊印 Special issue。

### 主办单位

国际土力学与岩土工程学会 TC35 分会(主席:英国剑桥大学 Malcom Bolton 教授)

中国土木工程学会土力学及岩土工程分会

### 承办单位

同济大学

山口大学(日本)

### 会议征文内容及要求

- (1) 土体宏微观力学特性的最新进展;
- (2) 描述岩土、岩石、粘结材料宏微观发展的新试验新技术;
- (3) 利用离散单元法模拟土体特性的新发展、新技术;
- (4) 离散元、有限元在岩土工程中应用的最新发展趋势;

(5) 离散元、有限元在与岩土工程相关领域如隧道、水利、道路等的发展与应用。

本次会议拟采用语言为英语,作者可就大会任一相关议题提交一篇 300 字左右的英文摘要,并在摘要页首附上文章标题、作者姓名、详细通讯地址、Email、联系电话等信息。

### 重要日期:

提交摘要截至日期:2009 年 5 月 1 日

摘要录用截至日期:2009 年 7 月 1 日

提交全文截至日期:2010 年 1 月 1 日

全文录用截至日期:2010 年 4 月 1 日

会议时间:2010 年 10 月 10 日

### 联系方式:

联系人:蒋明镜教授

地址:上海市四平路 1239 号同济大学地下建筑与工程系

邮编:200092

手机:13761404246

电话:21-65980238

传真:21-65985210

E-mail: mingjing.jiang@mail.tongji.edu.cn

is-shanghai2010@163.com

(大会组委会供稿)