

横观各向同性材料三维裂纹问题的数值分析

陈梦成

(华东交通大学 土木工程学院, 南昌 330013)

摘要: 严格从三维横观各向同性材料弹性空间问题的 Green 函数出发, 采用 Hadamard 有限部积分概念, 导出了三维状态下单位位移间断(位错)集度的基本解。在此基础上, 将三维任意形状的片状裂纹问题归结为求解一组以未知位移间断表示的超奇异积分方程; 并给出了边界元离散形式。对方程中出现的超奇异积分, 采用了 Hadamard 定义的有限部积分来处理。论文最后给出了若干典型片状裂纹问题的数值算例, 数值结果表明了本文方法是非常有效的。

关键词: 横观各向同性; 弹性体; 三维片状裂纹; 超奇异积分方程; 边界元
中图分类号: 346.1 **文献标识码:** A

1 引言

近年来, 随着复合材料、功能材料在工程得到广泛的应用, 其断裂力学的准确评价越来越受到人们的普遍关注。作为功能材料正在使用的压电材料、纤维增强复合材料、钨和锌等均属于横观各向同性材料。对于这些具有横观各向同性的材料的三维断裂力学问题, 目前已有少量关于特殊形状裂纹的纯解析工作^[1-3]。对于任意形状的三维裂纹问题, 作者^[4]使用超奇异积分方程方法给出了系统的理论分析, 但未进行任何数值分析。

本文首先使用已知的由 Pan 和 Chou^[5]得到的横观各向同性材料无限弹性体空间问题的基本解, 推导因裂纹扰动引起的单位位移间断集度的基本解, 然后, 利用 Hadamard^[6]有限部积分概念, 导出一组以位移间断为未知函数的、求解三维任意形状的片状裂纹问题的超奇异积分方程, 并给出相应的边界元离散形式。在数值求解过程中, 采用 Hadamard 定义的有限部积分处理方程中的超奇异积分方程。最后, 给出若干典型片状裂纹问题算例。

2 位移间断基本解和超奇异积分方程

设在三维横观各向同性无限弹性体中有如图 1 所示的任意形状的裂纹 $S(S^+)$ 位于横观各向同性材料的弹性对称面内, 并且整个空间域内的横观各向同性材料常数用张量符号表示为 C_{ijkl} 。在裂纹的上表面 S^+ 放置一直角坐标系 (x, y, z) , 并使 z 与 S^+ 垂直。假定无限远处不存在应力场和位移场, 则依据弹性力学理论中 Somigliana 等式, 在无限域内因裂纹扰动所产生的位移场为^[7]:

$$u_k(x, y, z) = - \int_{S^+} T_{ki}(x, y, z, \xi, \eta) \tilde{u}_i(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (i, k = x, y, z) \quad (1)$$

式中 $\tilde{u}_i(\xi, \eta) = \tilde{u}_i^+(\xi, \eta) - \tilde{u}_i^-(\xi, \eta)$ 称为位移间断(位错), $T_{ki}(x, y, z, \xi, \eta)$ 表示面积微元 $d\xi d\eta$ 上裂纹上下表面发生位移间断单位集度时场内任意一点的位移, 可写为

$$T_{ki}(x, y, z, \xi, \eta) = C_{i\alpha mn} G_{km, n}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) |_{\zeta=0} \quad (m, n = \xi, \eta, \zeta) \quad (2)$$

式中 $G_{km}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ 是由 Pan 和 Chou^[5]得到的 Green 函数, 表示在横观各向同性材料无限域内任意一点 (ξ, η, ζ) 沿 m 方向作用集中力时, 在另一点 (x, y, z) 沿 k 方向产生的位移。因此, 根据横观各向同性材料的本构关系, 可得到无限域内因裂纹扰动所产生的应力场, 即

$$\sigma_j(x, y, z) = \int_{S^+} S_{kj}(x, y, z, \xi, \eta) \tilde{u}_k(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (i, j, k = x, y, z) \quad (3)$$

收稿日期: 2006-10-30; 修改稿收到日期: 2007-04-26
基金项目: 国家自然科学基金(10132020, 10302022)
资助项目。
作者简介: 陈梦成(1962), 男, 博士, 教授
(E-mail: chenmch@ecjtu.jx.cn).

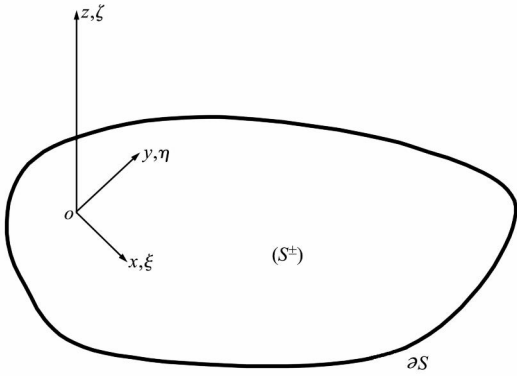


图1 问题描述

Fig. 1 Description of problems

此式表明, 面积微元 $d\xi d\eta$ 上裂纹上下表面发生位移间断单位集度时, 弹性体内任意一点的应力为 $S_{kij}(x, y, z, \xi, \eta)$, 其表达式可写为

$$S_{kij}(x, y, z, \xi, \eta) = C_{ijlm} T_{lk, m}(x, y, z, \xi, \eta) \quad (l, m, n = x, y, z) \quad (4)$$

在裂纹表面 S^+ 上应满足如下力的边界条件:

$$\begin{aligned} \sigma_i(x, y) &= -p_i(x, y) \\ x, y &\in S^+, \quad i = x, y, z \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $p_i(x, y)$ 为作用在裂纹面上的分布压力或外载荷。根据式(3)和式(4), 利用条件(5)和Hadamard^[6]有限部积分概念, 则三维片状裂纹问题可归结为求解如下一组关于未知位移间断的超奇异积分^[4, 8]:

$$\begin{aligned} &= \int_{S^+} \left[\frac{A}{r^3} + \frac{3B(\xi-x)^2}{r^5} \right] \tilde{u}_x(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &= \int_{S^+} \frac{3B(\xi-x)(\eta-y)}{r^5} \tilde{u}_y(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &\quad - 4\pi c_{11}(s_1 + s_2) p_x(x, y) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{S^+} \left[\frac{A}{r^3} + \frac{3B(\eta-y)^2}{r^5} \right] \tilde{u}_y(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ &= \int_{S^+} \frac{3B(\xi-x)(\eta-y)}{r^5} \tilde{u}_x(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ &\quad - 4\pi c_{11}(s_1 + s_2) p_y(x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

$$= \int_{S^+} \frac{C}{r^3} \tilde{u}_z(\xi, \eta) d\xi d\eta = - 4\pi c_{11}(s_1 + s_2) p_z(x, y) \quad (8)$$

式中

$$A = [2s_0(s_1 + s_2)c_{11}c_{44} - s_1^2 s_2^2 (c_{11}c_{33} - c_{13}^2)]$$

$$B = [s_1^2 s_2^2 (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) - s_0(s_1 + s_2)c_{11}c_{44}]$$

$$C = s_1 s_2 (c_{11}c_{33} - c_{13}^2)$$

另外, \int_{S^+} 为 Hadamard^[6]有限部积分, c_{ij} 为横观各向同性材料的弹性常数, 可由四阶张量 C_{ijkl} 得到^[9]:

$x, y \in S, r = \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2}$, 并且 $s_0^2 = c_{66}/c_{44}$, $s_i^2 (i = 1, 2)$ 为下面特征方程的根:

$$c_{33}c_{44}s^4 + [c_{13}(c_{13} + 2c_{44}) - c_{11}c_{33}]s^2 + c_{11}c_{44} = 0 \quad (9)$$

3 边界元离散过程

对于超奇异积分方程(6)~(8)的数值求解方法, 目前有两种, 即多项式^[10, 11]法和边界元法^[12]。本文拟采用边界元方法。

把片状裂纹上表面边界 S^+ 离散为 N 个三角形常单元 S_n^+ ($n = 1, 2, \dots, N$)。对于三角形常单元模式, 每一个三角形域内任意一点的位移间断和载荷均假定是常量, 而且, 此常量通常用三角形形心处的相应量来替代。因此, 超奇异积分方程(6)~(8)可归结为求解下列线性代数方程组:

$$\sum_{j=x, y, z} \sum_{n=1}^N A_{ij}^{mn} \tilde{u}_j^n = - 4\pi c_{11}(s_1 + s_2) p_i(x^m, y^m) \quad (i = x, y, z; m = 1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

式中

$$A_{xx}^{mn} = \int_{S_n^+} \left[\frac{A}{r^3} + \frac{3B(\xi-x^m)^2}{r^5} \right] d\xi d\eta$$

$$A_{xy}^{mn} = \int_{S_n^+} \frac{3B(\xi-x^m)(\eta-y^m)}{r^5} d\xi d\eta$$

$$A_{yy}^{mn} = \int_{S_n^+} \left[\frac{A}{r^3} + \frac{3B(\eta-y^m)^2}{r^5} \right] d\xi d\eta$$

$$A_{zz}^{mn} = \int_{S_n^+} \frac{C}{r^3} d\xi d\eta$$

$$A_{yx}^{mn} = A_{xy}^{mn}, A_{xz}^{mn} = A_{zx}^{mn} = A_{yz}^{mn} = A_{zy}^{mn} = A_{zz}^{mn} = 0$$

$$r = \sqrt{(\xi-x^m)^2 + (\eta-y^m)^2}$$

式中 A, B, C, s_0 和 S_i 的定义与上节之定义相同。求解线性方程组(10), 便可得到裂纹面 S^+ 上的位移间断 $\tilde{u}_j^n (j = x, y, z; n = 1, 2, \dots, N)$ 。

4 超奇异积分的计算方法

对于方程(10), 需要处理的典型积分为

$$I^{mn} = \int_{S^+} \frac{(\xi-x^m)^\alpha (\eta-y^m)^\beta}{r^{\alpha+\beta+3}} d\xi d\eta \quad (11)$$

式中 α 和 β 依下列四种形式取值:

$$\textcircled{1} \alpha = \beta = 0, \textcircled{2} \alpha = 2, \beta = 0$$

$$\textcircled{3} \alpha = \beta = 1, \textcircled{4} \alpha = 0, \beta = 2$$

计算式(11)中的 I^{mn} 时, 若 $m \neq n$, 即积分点单元与边界上载荷作用点单元不重合时, 可以利用普通的二维 Gaussian 数值积分; 若 $m = n$, 即积分点单元与边界上载荷作用点单元重合时, 式(11)中的被积函数具有 r^{-3} 的奇异性, 称为超奇异积分^[13], 需要按 Hadamard^[6]有限部积分原理计算。

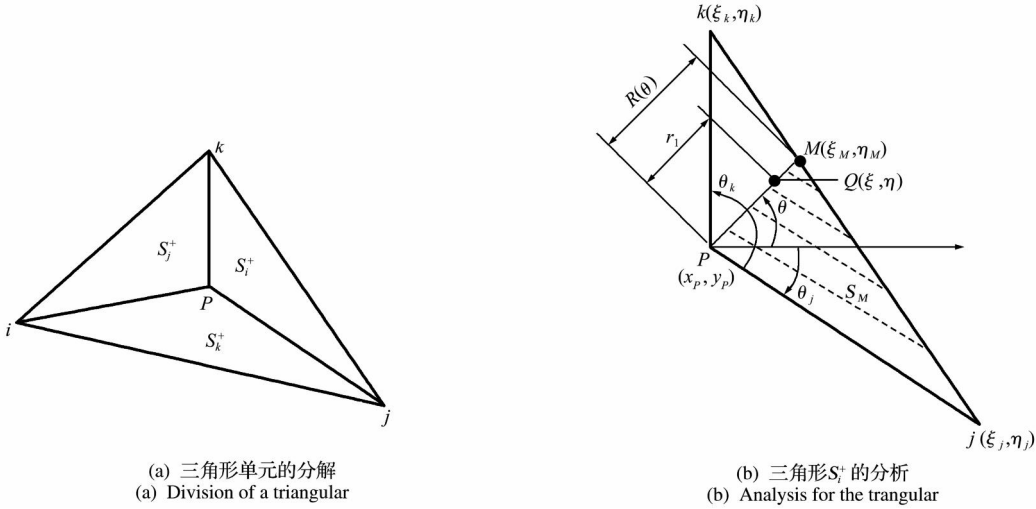


图 2 三角形单元的分析
Fig. 2 Analysis for triangulars

以下说明超奇异积分的计算方法。如图 2(a) 所示, 将求积三角形以形心与顶点的连线分割成三个小三角形。于是有

$$I^{mn} = I_i^{mn} + I_j^{mn} + I_k^{mn} = \int_{S_i^+} + \int_{S_j^+} + \int_{S_k^+} \quad (12)$$

以三角形 S_i^+ 为例, 在该三角形中建立以 P 为极点的局部极坐标系如图 2(b) 所示, 则

$$\xi - x_p = r_1 \cos \theta, \quad \eta - y_p = r_1 \sin \theta \quad (13)$$

于是有

$$I_i^{mn} = \int_{S_i^+} \frac{(\xi - x^m)^\alpha (\eta - y^m)^\beta}{r^{\alpha + \beta + 3}} d\xi d\eta = \int_{\theta_j}^{\theta_k} \cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta d\theta \int_0^{R(\theta)} \frac{1}{r^2} dr_1 \quad (14)$$

参照图 2 中的几何关系, 有

$$dS_M = \frac{R(\theta) \cdot R'(\theta)}{2\Delta_i} d\theta \quad (15)$$

因此, 式(14) 可以改写为

$$I_i^{mn} = \int_{S_i^+} \frac{(\xi - x^m)^\alpha (\eta - y^m)^\beta}{r^{\alpha + \beta + 3}} d\xi d\eta = -2\Delta_i \int_0^1 \frac{\cos^\alpha \theta \sin^\beta \theta}{R^3(\theta)} dS_M \quad (16)$$

式中

$$\sin \theta = \frac{(\eta_M - y_p)}{R(\theta)}, \quad \cos \theta = \frac{(\xi_M - x_p)}{R(\theta)}$$

$$R(\theta) = \sqrt{(\xi_M - x_p)^2 + (\eta_M - y_p)^2}$$

$$\xi_M = S_M \xi_k + (1 - S_M) \xi_j$$

$$\eta_M = S_M \eta_k + (1 - S_M) \eta_j$$

Δ_i 为小三角形 S_i^+ 的面积, 即

$$\Delta_i = [(\xi_j - \xi_k)(\eta_j - \eta_k) - (\xi_k - \xi_j)(\eta_k - \eta_j)]/2$$

式(16) 表明: 超奇异积分可用一维 Gauss 数值积分求解。

同样, 对 S_j^+ 和 S_k^+ 上的超奇异积分 I_j^{mn} 和 I_k^{mn} , 可分别仿此计算。一旦超奇异积分 I^{mn} 确定, 则方程(10) 中的系数 A_{ij}^{mn} 即可确定, 因而利用任一个标准 Gaussian 数值消元法, 便可求解出方程(10) 中的未知位移间断 \tilde{u}_j^n 。

5 裂纹前沿应力强度因子的确定方法

三维横观各向同性弹性体裂纹前沿的奇异应力场已由本文作者^[4,8] 给出。在此基础上, 依据弹性断裂力学中的应力强度因子定义, 可得到如图 3 所示的任意形状的三维片状裂纹前沿任一光滑点 Q 处的 I 型应力强度因子 K_I 、II 型应力强度因子 K_{II} 和 III 型应力强度因子 K_{III} 。它们可用位移间断表示为

$$K_I = \lim_{\xi_n \rightarrow 0} \frac{s_1 s_2 (c_{11} c_{33} - c_{13}^2) \tilde{u}_z(\xi_n, 0)}{2\sqrt{2} c_{11} (s_1 + s_2) \sqrt{\xi_n}} \quad (17)$$

$$K_{II} = \lim_{\xi_n \rightarrow 0} \frac{s_1^2 s_2^2 (c_{11} c_{33} - c_{13}^2) \tilde{u}_n(\xi_n, 0)}{2\sqrt{2} c_{11} (s_1 + s_2) \sqrt{\xi_n}} \quad (18)$$

$$K_{III} = \lim_{\xi_n \rightarrow 0} \frac{c_{44} s_0 \tilde{u}_\tau(\xi_n, 0)}{2\sqrt{2} \sqrt{\xi_n}} \quad (19)$$

式中 (τ, n, z) 为在光滑点 Q 处所建立的局部三轴正交坐标系(图 3); $\tilde{u}_z(\xi_n, 0)$, $\tilde{u}_n(\xi_n, 0)$ 和 $\tilde{u}_\tau(\xi_n, 0)$ 是对应于裂纹前沿光滑点 Q 处的双法线方向 z , 法线方向 n 和切线方向 τ 的位移间断。通过坐标变换可得到如下位移间断的局部坐标分量:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_n(\xi_n, 0) &\cong \tilde{u}_n(\xi, \eta), \quad \tilde{u}_\tau(\xi_n, 0) \cong \tilde{u}_\tau(\xi, \eta) \\ \tilde{u}_z(\xi_n, 0) &\cong \tilde{u}_z(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (20)$$

至此, 由式(10) 求到的裂纹面上的位移间断可用来计算裂纹前沿光滑点 Q 处的应力强度因子。

为了便于比较, 将它们除以含裂纹长为 $2b$ 的无限大平板受均匀拉伸载荷 p_0 作用时的应力强度因子, 进行无量纲化, 即

$$F_I = \frac{K_I}{p_0 \sqrt{b}}, \quad F_{II} = \frac{K_{II}}{p_0 \sqrt{b}}, \quad F_{III} = \frac{K_{III}}{p_0 \sqrt{b}} \quad (21)$$

6 数值计算例

基于上面所讨论的边界元数值方法, 编制了相应的计算机程序, 并利用其计算了若干典型形状的裂纹问题。在所有数值计算中, 裂纹表面上所受的载荷均假定为均布的; 所用的横观各向同性材料为镁, 其弹性常数取自于 Behrens^[14], 见表 1。计算结果与现有结果进行比较。

表 1 弹性常数数值(单位: GPa)

Tab. 1 Elastic constants (unit: GPa)

材料	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{33}	c_{44}
镁	59.7	26.2	21.7	61.9	16.4

表 3 受切向均匀内压作用的椭圆形片状裂纹的无量纲应力强度因子 F_{II} 和 F_{III}

Tab. 3 Dimensionless stress intensity factor F_{II} and F_{III} for a penny-shaped crack under shear loadings

方法	0	18	36	45	54	72	81	90
F_{II} 精确解 ^[5]	0.7668	0.6848	0.5193	0.4312	0.3435	0.1707	0.0852	0
F_{II} 本文结果	0.7764	0.6950	0.5288	0.4402	0.3507	0.1738	0.0863	0
F_{III} 精确解 ^[5]	0	-0.3015	-0.5112	-0.5843	-0.6407	-0.7118	-0.7290	-0.7347
F_{III} 本文结果	0	-0.3090	-0.5204	-0.5995	-0.6521	-0.7225	-0.7385	-0.7437

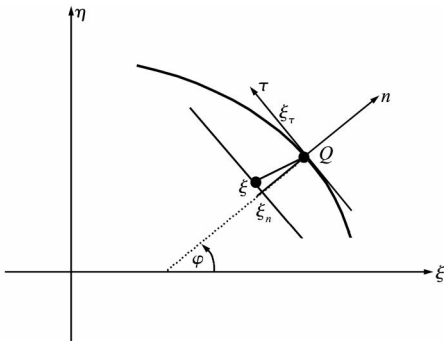


图 3 确定应力强度因子示意图

Fig. 3 Diagram for determination of stress intensity factors

算例 1 圆形片状裂纹问题。无限横观各向同性材料域中圆形片状裂纹作用着法向均匀内压力 p_0 , 裂纹的半为 a ($a = b$)。由于问题的对称性, 单元划分仅需在 1/4 的裂纹面上进行。网格单元划分示意图如图 4 所示。为考察网格单元数与数值计算结果的关系, 表 2 中列出了 4 种网格单元数时的应力强度因子数值结果。表 2 表明: 随着网格单元的细化, 数值计算精度提高了。

表 2 受法向均匀内压作用的圆形片状裂纹的无量纲应力强度因子

Tab. 2 Dimensionless stress intensity factor F_I for a penny-shaped crack under normal pressures

网格形式	单元数	本文结果	精确解 ^[4]	误差(%)
a	88	0.6516	0.6366	2.4
b	104	0.6488	0.6366	1.9
c	120	0.6451	0.6366	1.3
d	136	0.6422	0.6366	0.9

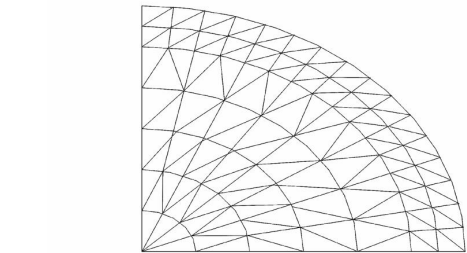


图 4 椭圆片状裂纹面上单元网格划分示意图
Fig. 4 Mesh division on a planar elliptical crack

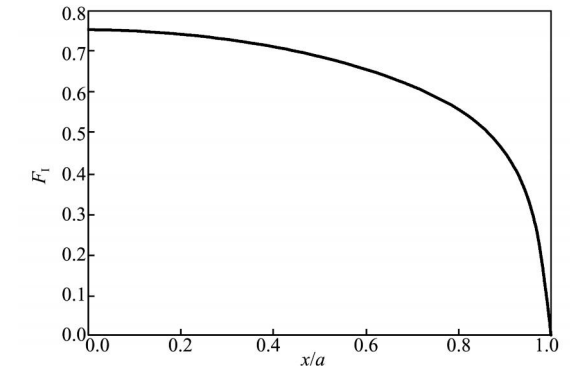


图 6 正方形片状裂纹在法向均布载荷作用下无量纲应力强度因子沿裂纹边长分布曲线

Fig. 6 Distribution of dimensionless stress intensity factor F_I along the border x/a of square crack subjected to normal pressures

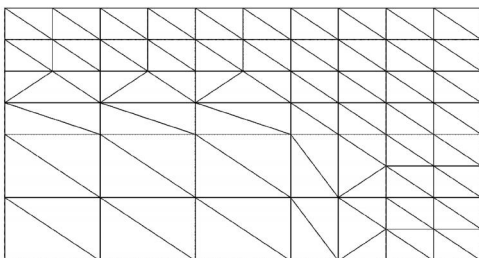


图 5 矩形片状裂纹面上单元网格划分示意图

Fig. 5 Mesh division on a planar rectangular crack

算例 2 椭圆形片状裂纹问题。无限横观各向同性材料域内椭圆形片状裂纹沿 x 方向作用着切向均匀压力 p_0 , 椭圆的长短轴比为 $a/b=2$ 。由于问题的对称性, 单元划分仅考虑在 $1/4$ 的裂纹面上进行。网格单元划分示意图如图 4 所示, 计算中采用了 136 个网格单元。表 3 列出了本文结果与理论解^[3]。表中结果比较表明, 本文数值结果与精确解之间的误差很小, 最大相对误差不超过 2%。

算例 3 矩形片状裂纹问题。无限横观各向同性材料域中矩形片状裂纹作用着法向均匀内压力 p_0 , 正方形片状裂纹的边长为 $a(a=b)$ 。由于问题的对称性, 单元划分仅需在 $1/4$ 的裂纹面上进行。网格单元划分示意图如图 5 所示, 计算中采用了 109 个网格单元。图 6 给出了用本文方法计算得到的无量纲应力强度因子 F_I 沿正方形片状裂纹边长分布的曲线。

7 结 论

本文给出了计算横观各向同性材料无限域中任意形状的片状裂纹问题的超奇异积分方程的边界元方法, 并对数值计算过程中所遇到的超奇异积分提出了特殊处理方法。算例结果表明, 本文建议的方法用于分析三维片状裂纹问题是可靠的, 能够获得令人满意的精度; 与传统的边界元方法结合, 可用来解决有限域内三维片状裂纹问题。

参考文献(References):

[1] SIH G C, CHEN E P. *Mechanics of Fracture Cracks in Composite Materials* [M]. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1981.

[2] KASSIR M K, SIH G C. Three dimensional crack problems[A]. *Sih GC Edited Mechanics of Fracture* [M]. Volume 2. Leyden: Noordhoff International

Publishing, 1975.

- [3] FABRIKANT V I. *Mixed Boundary Value Problem of Potential Theory and Their Application in Engineering* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [4] 陈梦成. 横观各向同性材料的三维断裂力学问题[J]. 力学学报, 2006, **38**: 612-617.
- [5] PAN Y C, CHOU T W. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid[J]. *J Appl Mech (Trans ASME Series E)*, 1976, **43**: 608-612.
- [6] HADAMARD J. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations* [M]. New York: Dover, 1923.
- [7] CHEN M C, NODA N A, TANG Renji. Application of finite part integral to planar interfacial fracture problems in 3D bimetals[J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1999, **66**: 885-890.
- [8] 余荷根, 陈梦成. 横观各向同性材料中三维裂纹的超奇异积分方程方法[A]. 第九届全国现代数学和力学会议论文集[C]. 2004: 335-339.
- [9] 罗祖道, 李思简. 各向异性材料力学[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1994.
- [10] 陈梦成, 高 闯, 汤任基. 三维界面裂纹的奇性应力场和应力强度分析[J]. 固体力学学报, 1999, **20**: 8-14.
- [11] 陈梦成, 余荷根, 汤任基. 三维裂纹问题的高精度数值解法[J]. 固体力学学报, 2002, **23**: 207-212.
- [12] 周维垣, 肖洪天, 吴劲松. 三维间断位移法及强奇异和超奇异积分的处理方法[J]. 力学学报, 2002, **34**: 645-651.
- [13] 陈梦成. 椭圆平片裂纹前沿应力强度因子解析解的超奇异积分方程方法[J]. 固体力学学报, 1999, **20**: 331-334.
- [14] BEHRENS E. Elastic constants of fiber reinforced composites with transversely isotropic constituents [J]. *ASME J Appl Mech*, 1971: 1062-1065.
- [15] 余荷根, 陈梦成. 横观各向同性材料椭圆片状裂纹问题的新方法[J]. 南昌大学学报, 2006.

The modified tensile stress crack propagation criterion and influence of cranny hydraulic pressure on crack propagation

ZHANG Dun fu^{*1}, LI Shu chai^{1,2}

(1. Department of Engineering Mechanics, School of Civil Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China;

2. Geotechnical & Structural Engineering Research Center, Shandong University, Jinan 250061, China)

Abstract: The first principal stress tensile stress criterion for brittle material was supplied and modified. The modified crack propagation criterion can give out crack propagation steps. The 2-D sidelong crack propagation was taken as an example. The element free Galerkin method was used. Numerical simulation of 2-D crack propagation without cranny hydraulic pressure was accomplished. The simulation results agree well with experiential results. The correctness of the maximal circumferential tension stress criterion is proved. Following on, the beginning rupture of 2-D crack with different cranny hydraulic pressure was studied. The 2-D crack propagation with given cranny hydraulic pressure was traced numerically. All results show that cranny hydraulic pressure has great influence on crack beginning rupture orientation, rupture step, rupture load and the intensity of rock-mass with crack. The crack propagation traces with and without cranny hydraulic pressure are different. But the upper propagation trend line with and without cranny hydraulic pressure are uniform.

Key words: maximal circumferential tensile stress criterion; cranny hydraulic pressure; crack propagation; element free galerkin method

(上接第 113 页)

Three dimensional numerical analysis of cracks in transversely isotropic materials

CHEN Meng-cheng

(School of Civil Engineering, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: In this paper, started rigorously from Green functions for elastic space problems of transversely isotropic materials, the fundamental solutions for a displacement-jump (dislocation) were derived by Hadamard's finite-part integral concepts. Subsequently, the problem of a three-dimensional planar crack with arbitrary shape in an infinite transversely isotropic solid was reduced to the solution of a set of hyper-singular integral equations with unknown displacement jumps. Discretization of the boundary element method on the crack surfaces was discussed. The hyper-singular integrals in the equations were numerically treated by the use of Hadamard's finite-part integral concepts. Finally, some numerical examples of typical-shaped planar crack problems were given and the effectiveness of the analysis was validated.

Key words: transversely isotropic material; elasticity; three-dimensional crack problem; hypersingular integral equation; boundary element method