

文章编号: 1007-4708(2009)01-0080-07

基于正交基无单元 Galerkin 法和 非线性规划的安定分析方法

陈莘莘, 刘应华*, 岑章志

(清华大学 工程力学系, 北京 100084)

摘要: 基于安定分析的下限定理, 用正交基无单元 Galerkin 法建立了交变载荷作用下理想弹塑性结构安定分析的下限计算格式。在给定的载荷域的载荷角点所对应的载荷作用下, 采用正交基无单元 Galerkin 法计算相应的虚拟弹性应力场, 并且利用结构在正交基无单元 Galerkin 法弹塑性增量分析中平衡迭代结果计算得到自平衡应力场基矢量, 然后由这些基矢量的线性组合模拟自平衡应力场。安定分析问题最终被归结为一系列未知变量较少的非线性数学规划子问题, 通过复合形法求解。算例表明该方法的计算结果是令人满意的, 并且对初始复合形顶点和用于构造自平衡应力场基矢量的载荷增量是非常不敏感的。

关键词: 无单元 Galerkin 法; 正交基; 安定分析; 非线性规划; 复合形法

中图分类号: TB125 **文献标识码:** A

1 引言

安定分析是塑性力学的一个重要分支, 其宗旨是确定各类工程结构的安定载荷, 为工程设计和安全评估提供依据。结构塑性极限分析只适用于比例加载情况, 也就是载荷各分量是按比例增长的。由于在实际工程应用中, 往往无法事先知道循环载荷随时间变化的历程, 而只知道载荷的变化范围, 这样塑性极限分析已不再适用, 而进行安定分析可以避开加载历史, 直接求解安定载荷, 这对于工程结构的设计和分析是十分有利的。由于结构安定分析最终归结为求解一个数学规划问题, 而这个数学规划问题含有许多变量和约束, 从而变成了大规模的数学规划问题, 造成维数障碍。目前很多研究都是围绕着发展安定分析方法而展开, 其中大量的研究工作就是为了克服维数障碍问题。迄今为止, 安定分析的数值方法主要是基于有限元^[1, 2]和边界元^[3, 4]。

近年来, 无网格已成为计算力学中十分热门的研究课题, 它最大的优势是消除了结点的网格束

缚, 采用影响域内结点的信息构造数值逼近。目前无网格法的种类已十分繁多^[5-7], 比较典型的有无单元 Galerkin 法, 无网格局部 Petrov Galerkin 法, 再生核粒子法和光滑粒子流体动力法等。其中, 无单元 Galerkin 法是发展良好和最具有应用价值的无网格方法之一^[7]。目前, 无网格法大多采用移动最小二乘法 (MLS) 来构造试函数。移动最小二乘法的权函数为紧支函数, 具有局部性质, 而且计算精度高。其缺点是每次求形函数及其导数, 都涉及到矩阵求逆和多个矩阵相乘, 计算时间长, 效率低。为保证移动最小二乘法的精度, 需保证矩阵求逆的精确性。基于正交基函数的移动最小二乘法^[9, 10]避免了原方法可能存在的病态矩阵求逆引起的计算误差, 计算精度高, 提高了计算效率。因此, 正交基无单元 Galerkin 法便于构造高精度的虚拟弹性应力场和自平衡应力场, 适合进行安定下限分析。

本文基于安定分析的下限定理, 采用正交基无单元 Galerkin 法进行结构离散。通过引入减缩基技术, 对所有的活动载荷角点分别施加载荷增量, 得到有限的几组自平衡应力场基矢量, 然后通过它们的线性组合构造了自平衡应力场的减缩空间, 最终将安定分析归结为一系列未知变量很少的非线性规划子问题, 并利用复合形法进行求解。通过对实例计算分析表明, 本文方法进行安定分析是可行和有效的。

收稿日期: 2007-03-20; 修改稿收到日期: 2007-10-29

基金项目: 国家自然科学基金(19902007)和全国优秀博士论文专项基金(200025)资助项目。

作者简介: 陈莘莘(1975), 男, 博士生;

刘应华*(1968), 男, 博士, 教授, 博士生导师

(E-mail: yhliu@mail.tsinghua.edu.cn);

岑章志(1946), 男, 博士, 教授, 博士生导师。

2 正交基无单元 Galerkin 法基本理论

2.1 基于正交基函数的移动最小二乘近似

应用基于正交基函数的移动最小二乘近似, 求解域内任一点的位移 $u(\mathbf{x})$ 可以近似为^[9, 10]

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i \quad (1)$$

式中 n 为计算点 \mathbf{x} 邻域(子域)内的结点数, \hat{u}_i 表示名义结点位移值, 通常它不是未知试函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的结点值, 而形函数 $\phi(\mathbf{x})$ 为

$$\phi(\mathbf{x}) = w_i(\mathbf{x}) \sum_{j=1}^m C_{ji}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

$$C_{ji}(\mathbf{x}) = q_j(\mathbf{x}, \mathbf{x}) q_j(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) / b_j(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$$b_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x}) q_j^2(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}) \quad (4)$$

式中 $w_i(\mathbf{x})$ 是结点 \mathbf{x}_i 对应的权函数, 是以 \mathbf{x}_i 为中心的紧支函数。对已知基函数 $p^k(\mathbf{x})$ ($k = 1, 2, \dots, m$), 正交基函数可用 Schmidt 正交化获得, 即

$$q^k(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = p^k(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{kj}(\bar{\mathbf{x}}) q_j(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

$$\alpha_{kj}(\bar{\mathbf{x}}) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(\bar{\mathbf{x}}) p^k(\mathbf{x}_i) q_j(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}})}{\sum_{i=1}^n w_i(\bar{\mathbf{x}}) q_j^2(\mathbf{x}_i, \bar{\mathbf{x}})} \quad (6)$$

基于正交基函数的移动最小二乘法计算过程并不涉及矩阵求逆, 避免了可能存在的病态矩阵求逆引起的计算误差, 提高了计算效率。

2.2 无单元 Galerkin 法的离散形式

对于线弹性问题, 采用罚函数法施加本质边界条件。利用最小势能原理可得离散求解方程为^[5-9]

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}^e \mathbf{B}_J d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I S \phi_J d\Gamma \quad (8)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \phi_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \phi_I \mathbf{b} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I S \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (9)$$

式中 $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix}$, 如果本质边界点上给定 x (或 y) 方向位移, 则 $s_x = 1$ (或 $s_y = 1$), 否则 $s_x = 0$ (或 $s_y = 0$), \mathbf{D}^e 为平面问题的弹性矩阵, \mathbf{B} 为应变矩阵。

进行弹塑性增量分析时, 通常将载荷划分成若干个增量, 然后在每一个载荷增量段内进行若干次

迭代。为了避免每次迭代都形成和分解总体刚度矩阵, 本文采用刚度矩阵保持为弹性刚度矩阵 \mathbf{K} (见式(8)) 的修正 Newton Raphson 方法。其迭代式为

$$\mathbf{K} \Delta \hat{\mathbf{u}}^{(n)} = \Delta \mathbf{Q}^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

式中

$$\Delta \mathbf{Q}^{(n)} = \int_{\Omega} \phi_I^{T+\Delta} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_I^{T+\Delta} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{t}^{T+\Delta} \sigma^{(n)} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_I S \Delta \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (11)$$

在迭代过程中, 求得任一高斯点的位移增量 $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$ 和应变增量 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}$ 。应力增量的计算一般采用下式计算^[11]:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^{(n)} = m \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)} + \int_0^{(1-m)\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(n)}} \mathbf{D}^p d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (12)$$

式中 m 为弹性因子, \mathbf{D}^p 为弹塑性矩阵。本文采用切向预测径向返回子增量法^[11] 完成本构关系的积分。

3 安定分析的静力定理

安定分析的静力定理^[3] (Melan 定理) 可以叙述为: 如果能找到一个与时间无关的自平衡应力场, 它与给定载荷范围内的任意外载荷所产生的弹性应力场相加后处处不破坏屈服条件, 则结构是安定的。其数学表达格式为

$$\beta^s = \max \beta \quad (13a)$$

$$\text{s. t. } \varphi[\beta \sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t) + \rho_j(\mathbf{x})] \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (13b)$$

$$\rho_{j,j} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (13c)$$

$$\rho_j n_j = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (13d)$$

式中目标函数 β 为待求的安定载荷乘子, $\sigma_{ij}^E(\mathbf{x}, t)$ 为给定载荷域内随时间变化的载荷 $\mathbf{P}(t)$ 作用下的虚拟弹性应力场, $\rho_j(\mathbf{x})$ 为自平衡应力场。约束条件式(13b) 为屈服条件, 式(13c) 与式(13d) 为自平衡应力场需要满足的平衡方程和力边界条件。

数学规划格式(13) 是一个无限维的问题, 未知量个数和约束方程的数目均为无穷多。所以, 应该对结构进行离散化处理。本文采用正交基无单元 Galerkin 法对二维结构进行离散。另外, 由于载荷 $\mathbf{P}(t)$ 可以随时间参数 t 在给定的载荷域内任意变化, 所以需要消除时间因素的影响。可以证明^[1-4], 由若干组相互无关的载荷工况所组成的载荷, 只要在载荷域 L 的有限个载荷角点上满足约束条件式(13b), 则对于载荷域 L 内的任意载荷均满足式

(13b)。这样, 约束条件(13b) 可以化为

$$\varphi \beta \sigma_i^E(j) + \rho_i \leq 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, NG; j = 1, 2, \dots, M) \quad (14)$$

式中 NG 为高斯点总数, M 为载荷角点的总数, $\sigma_i^E(j)$ 为第 j 个载荷角点所对应的载荷作用下第 i 个高斯点的虚拟弹性应力, ρ_i 为第 i 个高斯点的自平衡应力。

严格地说, 数值求解得到的安定载荷乘子 β 不具有下限性质, 因为虚拟弹性应力场和自平衡应力场只是近似解, 而且屈服条件也只能在有限个高斯点上得到满足。但是, 只要求出的虚拟弹性应力场和自平衡应力场足够精确, 而且屈服条件校核点选择合理, 仍然可以得到满意的解答。

4 平衡应力场的构造

对应于每个载荷角点的平衡应力场由带有载荷乘子的该载荷角点的虚拟弹性应力场和自平衡应力场两部分构成。在每个载荷角点所对应的载荷作用下, 离散化结构的屈服条件校核点 x_i 上的虚拟弹性应力 $\sigma_i^E(j)$, 可由上述的正交基无单元 Galerkin 法进行弹性分析得出, 而自平衡应力场 ρ_i 则可以由带有 R 个待定常数 (C_1, C_2, \dots, C_R) 的一组自平衡应力场基矢量 ($\rho_i^1, \rho_i^2, \dots, \rho_i^R$) 的线性组合进行模拟。因此, 对应于第 j 个载荷角点的平衡应力场可以表示为

$$\sigma_i(j) = \beta \sigma_i^E(j) + C_1 \rho_i^1 + C_2 \rho_i^2 + \dots + C_R \rho_i^R$$

$$(i = 1, 2, \dots, NG, j = 1, 2, \dots, M) \quad (15)$$

式中自平衡应力场基矢量 $\rho_i^1, \rho_i^2, \dots, \rho_i^R$ 可以由弹塑性增量分析的平衡迭代结果计算得到。

假设 $(k-1)$ 次迭代结束后, 载荷乘子 β^{k-1} 和高斯点的自平衡应力 $\rho_i^{(k-1)}$ ($i = 1, 2, \dots, NG$) 均已知, 第 j 个载荷角点的平衡应力场至少在结构内的一个高斯点 i 满足

$$\varphi [\beta \sigma_i^E(j) + \rho_i^{(k-1)}] = 0 \quad (16)$$

则称该载荷角点为活动载荷角点。对所有的活动载荷角点分别施加载荷增量, 并由弹塑性增量算法进行平衡迭代形成有限的几组自平衡应力场基矢量, 然后通过它们的线性组合构造自平衡应力场的减缩空间。对第 j 个活动载荷角点而言, 平衡迭代之

前各高斯点的总应力为

$$\delta_i^0 = \beta^{(k-1)} \sigma_i^E(j) + \rho_i^{(k-1)} = \sigma_i^{(k-1)}$$

$$(i = 1, 2, \dots, NG) \quad (17)$$

现在施加一个载荷增量 $\Delta \beta^{(k)} P(j)$, 其中 $P(j)$ 表示第 j 个活动载荷角点对应 $\beta = 1$ 时的结点载荷向量。用刚度矩阵保持为弹性刚度矩阵的修正 Newton Raphson 方法进行平衡迭代, 并令 q 表示第 q 次平衡迭代, 则对应第 1 次迭代的离散化结构平衡条件为

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} d\Omega = (\beta^{(k-1)} + \Delta \beta^{(k)}) P(j) - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta^{(0)} d\Omega \quad (18)$$

对于第 q 次迭代, 有

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^e \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(q)} d\Omega = (\beta^{(k-1)} + \Delta \beta^{(k)}) P(j) - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \delta^{(q-1)} d\Omega \quad (19)$$

将式(19) 减去式(18), 得

$$\int_{\Omega} \mathbf{B}^T [\delta^{(0)} - \delta^{(q-1)} + \mathbf{D}^e (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(q)})] d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \rho^l d\Omega = 0 \quad (20)$$

式(20) 表示 ρ^l 是一个与外载荷有关的自平衡应力场^[1]。将每次平衡迭代得到的 ρ^l 作为一个基矢量, 就形成了若干自平衡应力场基矢量。通常情况下, 对每个活动载荷角点产生 3 ~ 5 个基矢量。

5 安定分析的求解过程

安定分析可化为一系列数学规划子问题求解, 通过对自平衡应力场的不断修正, 使得它所对应的安定载荷乘子不断逼近真解。整个安定分析过程如下:

(1) 对于给定的外载荷, 求解每个载荷角点对应的各高斯点处虚拟弹性应力 $\sigma_i^E(j)$ 和结构的虚拟弹性极限载荷参数 β_E 。

$$\beta_E = \min_i \beta_E(i) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad (21)$$

式中 $\beta_E(i)$ 表示对应于第 i 个载荷角点的弹性极限载荷乘子。如果某个载荷角点对应的恰好是零载荷, 则规定该载荷角点的弹性极限载荷乘子为 $+\infty$ 。

(2) 在弹性极限载荷的基础上, 对所有的活动

载荷角点施加载荷增量 $\Delta\beta^{(1)} P(j)$, 得到一组自平衡应力场基矢量, 然后通过下面将要介绍的复合形法对非线性规划问题进行求解, 可得到第一个近似解 β_1 。

(3) 以第 $(k-1)$ 次规划完成后的平衡应力场为基础, 对所有的活动载荷角点分别施加载荷增量 $\Delta\beta^{(k)} P(j)$, 得到一组自平衡应力场基矢量, 同时将第 $(k-1)$ 次数学规划完成后得到的自平衡应力场也作为一个基矢量, 通过数学规划求解得到第 k 个近似解 β_k 。

(4) 如果相邻的两个载荷乘子近似解对于给定的误差容限 ε 满足如下的关系:

$$(\beta_k - \beta_{k-1}) / \beta_k \leq \varepsilon \quad (22)$$

则 β_k 即是安定载荷乘子的近似解; 如果不满足, 则转第(3)步继续下一个子问题。

整个求解过程实质上是将一个维数很高的数学规划问题转化为一系列维数很低的子问题进行求解。计算表明, 只要进行 3 ~ 5 次子问题(非线性规划)的求解, 就可以得到满意的结果。

6 非线性规划问题的求解

将式(15)代入式(14), 则所有数学规划子问题可以统一表示为

$$\beta^s = \max \beta \quad (23a)$$

$$\text{s.t. } \varphi[\beta\sigma_i^E(j) + C_1\beta + C_2\beta^2 + \dots + C_R\beta^R] \leq 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, NG, j = 1, 2, \dots, M) \quad (23b)$$

式中 NG 表示屈服条件校核点的个数。此时, 式(13)中的后两个约束条件(13c, 13d)已自动满足。

从式(23)可以看出, 该数学规划问题具有以下特点: (1) 优化变量较少, 即维数较低((3 ~ 5) × $L + (1 ~ 2)$, L 为活动载荷角点的个数); (2) 约束方程很多, 即阶数很高($NG \times M$), 约束方程系数矩阵呈纵向细窄条形; (3) 当采用 Mises 屈服条件时, 约束方程均为二次方程。

根据该非线性规划问题的上述特点, 可采用复合形法进行求解^[12]。

第 1 步: 考虑到该非线性规划问题具有变量少, 而且约束方程均为二次等特点, 对于一组给定的 C_1, C_2, \dots, C_R , 求出所对应的 β^s 。

将式(23b)中的 $NG \times M$ 个不等式约束方程整理为 β 的二次函数, 并记为

$$Q_i(\beta) = a_i\beta^2 + b_i\beta + c_i \leq 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, NG \times M) \quad (24)$$

如果上面的 $NG \times M$ 个一元二次不等式都有解区间并且这些解区间存在非零的交集, 则将 C_1, C_2, \dots, C_R 称为本问题的一个允许点, 反之则为不允许点。将这个交集区间的最大值记为 β^s , 给出如下的函数关系:

$$\beta^s = \varphi(C_1, C_2, \dots, C_R) \quad (25)$$

第 2 步: 求 $C_1^*, C_2^*, \dots, C_R^*$, 使其对应的 β^{s*} 逼近真实的安定载荷乘子 β^s 。

构造初始复合形, 即在一个 R 维空间中构造 $K = 2R + 1$ 个初始顶点 $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(2R+1)}$, 每个顶点的坐标代表一组 C_1, C_2, \dots, C_R , 并采取强制措施保证所选取的初始复合形每个顶点都是允许点(如果选取的某个点不是允许点, 则去掉这个点, 直到选出 K 个顶点为止)。

在产生了初始复合形以后, 进行如下迭代:

(1) 找出所有顶点中使目标函数值最小的点(最坏点) $x^{(w)}$ 和使目标函数值最大的点(最好点) $x^{(b)}$, 并求除了 $x^{(w)}$ 以外的 $K - 1$ 个点的中心点 \hat{x} :

$$x^{\wedge} = \frac{1}{2R} \left(\sum_{i=1}^{2R+1} x^{(i)} - x^{(w)} \right) \quad (26)$$

(2) 求 $x^{(w)}$ 关于 x^{\wedge} 的反射点 x^{Δ} :

$$x^{\Delta} = (1 + \lambda)x^{\wedge} - x^{(w)} \quad (27)$$

式中 $\lambda > 0$ 为反射系数(一般可取 $\lambda = 1.3$), 若 x^{Δ} 不是允许点, 则将 x^{Δ} 向中心点 x^{\wedge} 移动一半距离, 即

$$x^{\Delta}(\text{new}) = 0.5(x^{\Delta}(\text{old}) + x^{\wedge}) \quad (28)$$

代替原来的 x^{Δ} ; 若新的 x^{Δ} 仍不是允许点, 则重复应用式(28), 直到 x^{Δ} 成为允许点为止。

(3) 计算 $\varphi(x^{\Delta})$, 若

$$\varphi(x^{\Delta}) > \min_{i \neq w} (\varphi(x^{(i)})) \quad (29)$$

则以 x^{Δ} 代替 $x^{(w)}$, 一次迭代完成; 否则, 将 x^{Δ} 向中心点 x^{\wedge} 移动一半距离, 即由式(28)求出新的 x^{Δ} , 直到式(29)满足为止。

(4) 对于给定的误差容限 $\hat{\varepsilon}$, 如果有

$$\|x^{(b)} - x^{(w)}\| \leq \hat{\varepsilon} \quad (30)$$

则 $x^{(b)}$ (其坐标即为 $C_1^*, C_2^*, \dots, C_R^*$) 所对应的 β^{*} 即为一个近似最优解, 本次数学规划问题完成。如果不满足, 则重复整个迭代过程, 直到满足式(30)为止。

7 数值算例

本文采用四次样条权函数, 即

$$w_i(x) = 1 - 6\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^2 + 8\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^3 - 3\left(\frac{d_i}{r_i}\right)^4 \quad (0 \leq d_i \leq r_i) \quad (31)$$

式中 d_i 是 x 与 x_i 的距离, $d_i = \|x - x_i\|$; 结点 x_i 的支持域半径 r_i 可以取为 $r_i = 3.0 \times d_i^9$, 其中, d_i^9 表示结点 x_i 与距其最近的第 9 个结点的距离。计算中, 选用了二次基函数, 且材料参数均取弹性模量为 $E = 2.1 \times 10^5$ MPa, 泊松比 $\nu = 0.3$, 屈服极限 $\sigma_s = 200$ MPa。

算例 1 受弯矩和剪力联合作用的矩形梁

一个长为 $L = 8$ m, 截面为 $H \times B$ 的矩形梁 ($H = 1$ m 为高度, $B = 1$ m 为厚度), 受到循环切向载荷 P 和弯矩 M 的联合作用, 如图 1 所示。考虑如下两种加载形式:

(1) 安定分析工况 I:

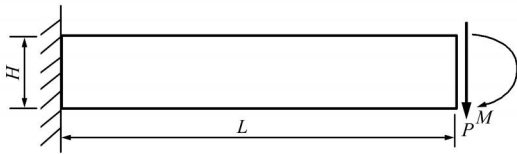


图 1 梁的结构和载荷

Fig. 1 The structure and loads of the beam

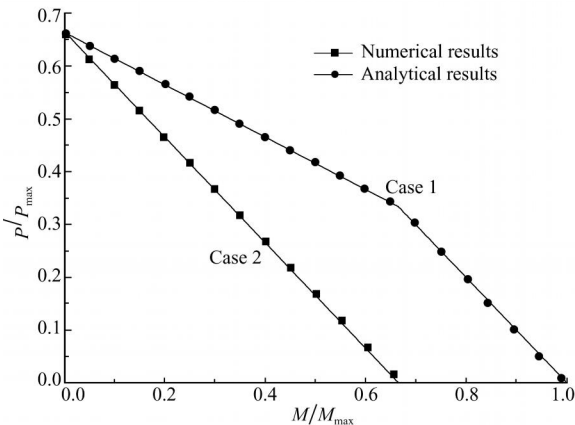


图 2 本文数值解与解析解的比较

Fig. 2 Comparison of the present numerical results with analytical solutions

$$0 \leq M \leq \beta M_{\max}, -\beta P_{\max} \leq P \leq \beta P_{\max} \quad (32)$$

此时该问题的解析解为

$$\begin{cases} \frac{P}{P_{\max}} + \frac{1}{2} \frac{M}{M_{\max}} = \frac{2}{3}, & \forall 0 \leq \frac{M}{M_{\max}} \leq \frac{2}{3} \\ \frac{P}{P_{\max}} + \frac{M}{M_{\max}} = 1, & \forall \frac{2}{3} \leq \frac{M}{M_{\max}} \leq 1 \end{cases} \quad (33)$$

(2) 安定分析工况 II:

$$\begin{cases} -\beta M_{\max} \leq M \leq \beta M_{\max} \\ -\beta P_{\max} \leq P \leq \beta P_{\max} \end{cases} \quad (34)$$

此时该问题的解析解为

$$P/P_{\max} + M/M_{\max} = \frac{2}{3} \quad (35)$$

计算域均匀布置 41×9 个结点, 40×8 个积分背景网格, 每一背景网格中采用 4×4 高斯点进行积分。从图 2 可以看出, 本文计算结果与解析解吻合很好, 从而说明正交基无单元 Galerkin 法在安定分析中可以取得很好的计算精度。

算例 2 受双边载荷作用的带孔方板

本算例计算了带孔方板受双向拉伸时的安定载荷如图 3 所示。这是安定分析数值计算的一个典

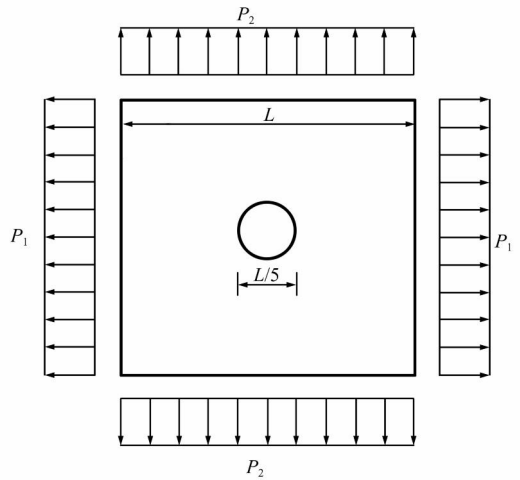


图 3 带孔方板受双向拉伸示意图

Fig. 3 Sketch map of the plate

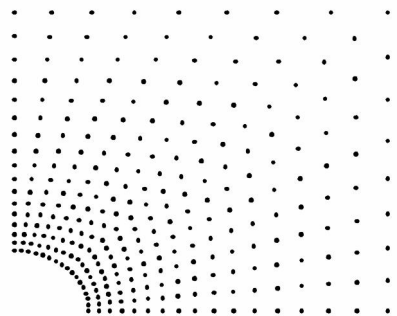


图 4 带孔板的结点布置

Fig. 4 Nodes for the square plate with a central circular hole

型算例。小孔直径 d 和板长 L 的比值为 $d/L = 0.2$ 。结构受到双向拉伸载荷 P_1 与 P_2 的作用, P_1 和 P_2 均能在一定的范围内自由变化, 即 $0 \leq P_1 \leq P_1^{\max}$, $0 \leq P_2 \leq P_2^{\max}$ 。由于对称性, 可取结构的四分之一作为计算模型, 结点配置如图 4 所示。

从图 5 可以看出, 本文的计算结果与文献[2]的下限解及文献[13]的上限解都吻合很好, 说明本文的求解方法是可行的。

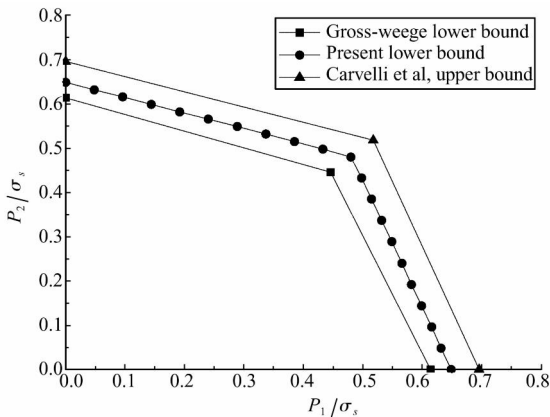


图 5 带孔方板的安定载荷域比较

Fig. 5 The comparison of shakedown domains

8 结 论

本文首次采用正交基无单元 Galerkin 法, 建立了理想弹塑性结构安定分析的整套求解算法。由本文分析和算例求解结果可以看出:

(1) 正交基无单元 Galerkin 法可以作为一种有效的数值方法用于安定分析问题。由于正交基无单元 Galerkin 法计算精度高, 适合构造高精度的虚拟弹性应力场和自平衡应力场基矢量, 从而可以保证安定载荷乘子解的计算精度。另外, 正交基无单元 Galerkin 法简化了数值计算的前处理和后处理过程, 因此选用正交基无单元 Galerkin 法求解安定分析问题具有明显的优势。

(2) 本文所采用的构造自平衡应力场的方法降低了所形成的数学规划问题的未知变量数。另外, 用复合形法直接求解非线性数学规划问题, 既保证了求解的精度, 又避免了对屈服面进行线性化所引起的求解规模增大。计算结果表明, 本文所提出的安定下限分析算法具有较高的计算精度, 具有很好的数值稳定性。

参考文献 (References):

- [1] STEIN E, ZHANG G. Shakedown with nonlinear strain hardening including structural computation using finite element method[J]. *International Journal of Plasticity*, 1992, **8**: 1-31.
- [2] GROSS WEEGE J. On the numerical assessment of the safety factor of elastoplastic structures under variable loading[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1997, **39**(4): 417-433.
- [3] LIU Y H, ZHANG X F, CEN Z Z. Lower bound shakedown analysis by symmetric Galerkin boundary element method[J]. *International Journal of Plasticity*, 2005, **21**: 21-42.
- [4] 张晓峰, 刘应华, 岑章志. 结构安定分析的 Galerkin 边界元方法[J]. *力学学报*, 2002, **34**(5): 726-734. (ZHANG Xiaofeng, LIU Yinghua, CEN Zhangzhi. Shakedown analysis of structures by symmetric Galerkin boundary element method[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, **34**(5): 726-734. (in Chinese))
- [5] 张雄, 刘岩. 无网格法[M]. 北京: 清华大学出版社/Springer 出版社, 2004. (ZHANG Xiong, LIU Yan. *Meshless Methods* [M]. Beijing: Tsinghua University Press/Springer Press, 2004. (in Chinese))
- [6] 张雄, 宋康祖, 陆明万. 无网格法研究进展及其应用[J]. *计算力学学报*, 2003, **20**(6): 730-742. (ZHANG Xiong, SONG Kangzu, LU Mingwan. Research progress and application of meshless method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, **20**(6): 730-742. (in Chinese))
- [7] BELYTSCHKO T, KRONGAUZ Y, ORGAN D. Meshless methods: An overview and recent developments[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1996, **139**: 3-47.
- [8] BELYTSCHKO T, LU Y Y, GU L. Element free Galerkin method[J]. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 1994, **37**: 229-256.
- [9] LU Y Y, BELYTSCHKO T, GU L. A new implementation of the element free Galerkin method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994, **113**: 397-414.
- [10] 张建辉, 邓安福. 基于正交基函数的薄板弯曲无单元

- 法 MLS 导函数及其应用[J]. 计算力学学报, 2003, 20(3): 350-360. (ZHANG Jiarr hui, DENG A rr fu. Element free method MLS derivatives based on orthogonal basic functions and its application to thin plate bending[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2003, 20(3): 350-360. (in Chinese))
- [11] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003. (WANG Xu chen. *Finite Element Method* [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003. (in Chinese))
- [12] 席少霖, 赵风治. 最优化计算方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983. (XI Shaolin, ZHAO Feng zhi. *Computational Methods of Optimization* [M]. Shanghai: Science and Technology Press of Shanghai, 1983. (in Chinese))
- [13] CARVELLI V, CEN Zhang zhi, LIU Ying hua. Shakedown analysis of defective pressure vessels by a kinematic approach[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 1999, 69: 751-764.

Shakedown analysis by using the element free Galerkin method with orthogonal basis and nonlinear programming

CHEN Sheir-shen, LIU Ying-hua^{*}, CEN Zhang zhi

(Department of Engineering Mechanics, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: The computational formulation of lower bound shakedown analysis of structures under the action of variable loads is established by using the element free Galerkin (EFG) method with orthogonal basis. The considered structure is made up of elasto-perfectly plastic material. The fictitious elastic stress field associated with the corners of the given load domain can be computed by using the EFG method with orthogonal basis. The self-equilibrium stress field is expressed by linear combination of several self-equilibrium stress basis vectors with parameters to be determined. These self-equilibrium stress basis vectors are determined by equilibrium iteration procedure during elasto-plastic incremental analysis. Through modifying the self-equilibrium stress subspace continuously, the lower bound shakedown analysis problem is finally reduced to a series of subproblems of nonlinear programming with relatively few optimization variables. The Complex method is used to solve these nonlinear programming subproblems. The numerical results of the solution procedure adopted herein appear to be satisfactory and rather insensitive to the choice of the initial Complex configurations and load increments used to create self-equilibrium stress basis vectors.

Key words: element free Galerkin method; orthogonal basis; shakedown analysis; nonlinear programming; Complex method