

车桥系统非平稳随机振动的 PEM-PIM 算法

张志超, 张亚辉, 赵岩*, 林家浩

(大连理工大学 运载工程与力学学部 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

摘要:研究了车桥耦合系统受到路面不平激励而发生的非平稳随机振动。采用虚拟激励方法(PEM)将路面的竖向随机不平度精确地转化为一系列竖向简谐不平度的叠加,从而简化了运动方程的求解,在此基础上用精细积分法(PIM)的三种格式进行数值计算。这种基于虚拟激励法的精细积分(PEM-PIM)算法比通常的数值积分方法更真实地模拟了车辆作用力在时间域和空间域上的连续变化,也更精确地实施了数值积分。与广泛采用的 Newmark 方法比较,三种 PEM-PIM 格式处理这类问题时在分析精度和计算效率上都有显著的改善,而又各有特色。

关键词:车桥耦合系统;精细积分;虚拟激励法;路面不平顺

中图分类号:O302 文献标识码:A

1 引言

近年来,随着科学技术的不断进步,车辆运行速度不断加快,车辆载重逐渐加大,车流密度日益增加,车桥耦合动力分析问题日益受到人们的关注,对车桥耦合系统的动力性态进行深入研究具有重要意义。

引起车桥耦合系统振动最重要的因素就是路面的随机不平顺性。应用随机振动理论来求解系统的动力响应是最为合理的。但是,目前对车桥耦合问题真正基于有限元方法应用随机振动理论来进行求解的论文还很少。大多数学者^[1-3]是用一条或少数几条样本曲线,借助时间历程分析和粗略的统计处理来估计路面随机不平顺特性对车辆振动的影响。这样做很难准确地反映路面不平顺的概率特征,动力响应计算不够准确,从而导致振动控制可靠性不高,难于满足严格的技术要求。

此外,很多研究论文采用以 Newmark 差分格式为代表的逐步积分方法^[3-6]进行求解,对于计算精度和效率却很少讨论,这是欠稳妥的。实际上,当使用传统逐步积分方法处理车桥耦合问题时,在

每一个积分步内,车辆的位置及其耦合作用力的作用位置与大小都假定为固定不变的,仅当进入下一个积分步时,车辆和惯性力才“突变”到另一个位置上,而耦合作用力也突然改变大小,在另一个固定点上以不变值再持续一个时间步长。由于不能考虑荷载在空间域的连续移动和耦合作用力在时间域与空间域的连续变化,当时间步长取得不够小时,这种荷载变化模式就会造成较大的计算误差。

针对以上存在的问题,本文首先采用随机振动分析虚拟激励法^[7,8]的基本思想,将路面的竖向随机不平度精确地转化为一系列竖向简谐不平度的叠加,从而使运动方程的求解大大简化,同时仍然保持了理论上的精确性。在得到定义在有限时间区间内的确定性激励以后,将动力方程质量阵中随时间变化的部分移到方程的右边,将耦合作用力作为外载来处理,然后使用精细积分方法^[9-10]来迭代求解。在生成耦合作用力时,采用了将前后积分时刻的单元节点信息进行随时间动态插值的方法,较好地模拟了积分步内耦合作用力随时间的连续变化。在此基础上,建立了“协调分解”、“混合分解”和“简单分解”三种分解方式,并对它们分别建立了精细积分格式。数值计算表明:基于虚拟激励方法的三种精细积分格式在处理随机路面不平顺时,其分析精度和计算效率各有特色,且都比 Newmark 方法有显著提高。

收稿日期: 2007-10-31; 修改稿收到日期: 2008-03-06

基金项目: 国家自然科学基金(10502011); 国家“863”高科技项目(2007AA11Z101)资助。

作者简介: 张志超(1982), 男, 博士生;

张亚辉(1972), 男, 博士, 副教授;

赵岩*(1974), 男, 博士, 讲师

(E-mail: yzhao@dlut.edu.cn);

林家浩(1941), 男, 教授, 博士生导师。

2 移动车辆作用力的连续动态分解

假设桥梁长度为 L , 弯曲刚度记为 $EI(x)$, 单位长度梁的质量为 $\bar{m}(x)$ 。车辆模型如图 1 所示, 由车轮和车厢两部分组成, 其中车轮质量为 M_1 , 车厢质量为 M_2 , 连接车轮和车厢的弹簧和阻尼器参数分别为: 弹簧刚度 k_1 , 阻尼器系数 c_1 。同时考虑桥梁长度有限, 路面不平顺设为均匀调制演变随机过程 $W(x) = \tilde{g}(x)r(x)$, 其中 $r(x)$ 为以空间坐标为自变量的零均值平稳随机过程, 其功率谱 $S_{r(x)}$ 已知, $\tilde{g}(x)$ 为确定性函数。

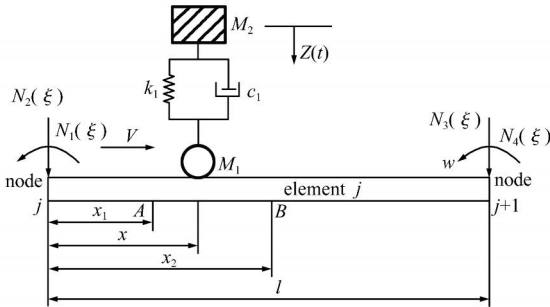


图 1 移动车辆在第 j 单元内移动

Fig. 1 The vehicle moving in the j th element

基于 Kirchhoff 假定^[11], 典型的桥单元模型如图 1 所示, 长度为 l 。假设车辆自单元左端向右以速度 V 匀速移动, t_k 是荷载移动到 A 点的时刻, 在此后的 Δt 时间间隔内, 荷载由 A 点移动到 B 点, 且仅在第 j 个单元内移动; A 点和 B 点离该单元左节点 j 的距离分别为 x_1 和 x_2 。设车辆从 A 点移动到位置 x 所用的时间是 τ , $\tau \in [0, \Delta t]$, 并记座标 x 的无量纲参数为 $\xi = x/l$, 则

$$x = x_1 + \tau(x_2 - x_1) / \Delta t$$

或
$$\xi = \frac{x_1}{l} + \frac{(x_2 - x_1)}{l\Delta t}\tau = \xi_1 + \xi_2\tau \quad (1)$$

式中 $\xi_1 = \frac{x_1}{l}$, $\xi_2 = \frac{(x_2 - x_1)}{l\Delta t} = \frac{V}{l}$

车辆在桥梁上匀速移动时, 由于耦合力的存在, 需要确定桥梁单元内任意点的位移、速度和加速度等信息。众所周知, 当采用有限单元法时, 单元内任意点的信息只能由节点信息借助形函数得到。为了更好地模拟耦合力在时间域内的连续变化规律, 将前后积分时刻对应的节点信息进行了线性插值。以节点加速度的时间线性插值为例来说明: 假设车辆保持在第 j 个单元内运动, 第 k 时刻的节点加速度信息都已经确定, 分别为 a_j^k 和 a_{j+1}^k 。现在要

求解第 $k+1$ 时刻的节点加速度信息, 即 a_j^{k+1} 和 a_{j+1}^{k+1} , 将两个积分时刻的加速度信息进行时间线性插值分析计算, 得到车辆在积分步内移动时单元节点的加速度信息:

$$a_j = a_j^k + (a_j^{k+1} - a_j^k) \frac{\tau}{\Delta t}$$

$$a_{j+1} = a_{j+1}^k + (a_{j+1}^{k+1} - a_{j+1}^k) \frac{\tau}{\Delta t} \quad (2)$$

进而可得到车辆作用位置的加速度。在求解的过程中, 为了提高第 $k+1$ 时刻节点加速度的计算精度, 可以采用迭代求解的方法。在迭代开始阶段, 因为没有初始的第 $k+1$ 时刻的节点加速度, 所以假设 $a_j^{k+1} = a_j^k$, $a_{j+1}^{k+1} = a_{j+1}^k$, 然后进行迭代。一般迭代 2~3 次就可得到理想结果。综合效率较高的, 见后面的例题。

2.1 协调分解法

在移动车辆所在位置, 假定车辆对桥梁的作用力 $p(t)$ 已经确定, 由于在有限元分析中外力荷载需要通过形函数分解成为等效的节点力, 因此, 在任意时刻 $t = t_k + \tau$ ($\tau \in [0, \Delta t]$), 该作用力 $p(t)$ 分解成为等效节点力形式:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= N_1(\xi)p(t), & f_2(t) &= N_2(\xi)p(t) \\ f_3(t) &= N_3(\xi)p(t), & f_4(t) &= N_4(\xi)p(t) \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $t = t_k + \tau$, $N_i(\xi)$ ($i = 1 \sim 4$) 是 Bernoulli Euler 梁单元的形函数, 如图 1 所示, 其形式为 $N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $N_2 = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)l$, $N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_4 = (-\xi^2 + \xi^3)l$ (4)

因此桥梁的外力向量具有形式:

$$\{F(t)\} = \{0, \dots, N_1, N_2, N_3, N_4, \dots, 0\}^T p(t\tau) \quad (5)$$

将式(1)、(3)和(4)代入式(5), 经过整理, 得

$$\{F(t)\} = (\{d_0\} + \{d_1\}\tau + \{d_2\}\tau^2 + \{d_3\}\tau^3)p(t_k + \tau) \quad (6)$$

式中 $\{d_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), 是常系数向量。

2.2 简单分解法

根据力的平衡原理将作用力 $p(t)$ 分解到单元左右节点 j 和 $j+1$ 上, 得到两个节点力:

$$f_1 = p(t)(1 - \xi), \quad f_2 = p(t)\xi \quad (7)$$

不难按照对号入座法, 则用式(7)生成荷载向量 $\{F(t)\}$, 形式为

$$\{F(t)\} = (\{h_0\} + \{h_1\}\tau)p(t_k + \tau) \quad (8)$$

式中 $\{h_i\}$ ($i = 0, 1$), 是常系数向量。

2.3 混合分解法

混合分解法的思想是:先将点荷载按简单分解法分解到 A 和 B 两点,然后再将这两点的荷载分别按协调分解法分解到单元两端节点,并叠加。这样得到的荷载向量 $\{F(t)\}$ 可表示为

$$\{F(t)\} = [\{d_0\} + \{c_1\} \tau] p(t_k + \tau) \quad (9)$$

式中

$$\{c_1\} = \{d_1\} + \{d_2\} \Delta t + \{d_3\} \Delta t^2$$

3 车桥系统的基本动力方程

基本的车桥耦合竖向振动模型已经在前一节提出,车辆以速度 V 自左向右匀速移动。设简支梁的动挠度为 $Y(x, t)$, 车厢 M_2 的动位移为 $Z(t)$, 并且假定车轮 M_1 沿梁长移动而不脱离梁体, 即其位移与它所在位置梁段的挠度是一致的, 可以表示为 $y(Vt, t)$, 经推导得到车桥系统的动力方程^[4]:

$$[\bar{M}]\{\ddot{U}\} + [\bar{C}]\{\dot{U}\} + [\bar{K}]\{U\} = \{f_1\} + \{f_2\} \quad (10)$$

式中

$$\{f_1\} = \begin{Bmatrix} \{R_f\} \\ 0 \end{Bmatrix} (M_1 + M_2)g, \quad \{U\} = \begin{Bmatrix} \{Y\} \\ Z \end{Bmatrix}$$

$$\{f_2\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 1 \end{Bmatrix} (c_1 \dot{W} + k_1 W) - \begin{Bmatrix} \{R_f\} \\ 0 \end{Bmatrix} M_1 \ddot{W}$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} [M'] + \{R_f\} M_1 \{R_f\}^T & \{R_f\} M_2 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{C}] = \begin{bmatrix} [C'] & 0 \\ -c_1 \{R_f\}^T & c_1 \end{bmatrix}, \quad [\bar{K}] = \begin{bmatrix} [K'] & 0 \\ -k_1 \{R_f\}^T & k_1 \end{bmatrix}$$

式中 $[M']$, $[C']$ 和 $[K']$ 分别是桥梁的质量阵、阻尼阵和刚度阵, $\{R_f\}$ 为单元内集中力向节点分解的分解向量, 当采用上节不同的分解方式时, 它有不同形式。从式(10)可以看出, 车桥系统的激励项可以分为两部分: 由车辆重力产生的确定性激励 $\{f_1\}$ 和由路面不平引起的随机性激励 $\{f_2\}$ 。根据线性系统的叠加原理, 对于两种不同性质的激励动力方程可以分开进行求解计算。对于确定性激励, 可以直接使用精细积分格式对动力方程进行求解计算; 对于随机性激励则首先需要采用随机振动分析的高效算法 - 虚拟激励法, 将随机性激励转化为虚拟的确定性激励, 进而采用精细积分格式对动力方程进行数值求解。

4 精细积分法

将上节得到的系统动力方程简化可以得到

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\} \quad (11)$$

则运动方程在状态空间中表达为

$$\dot{\{v\}} = [H]\{v\} + \{r(t)\} \quad (12)$$

式中

$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & I \\ B & G \end{bmatrix}, [B] = -[M]^{-1}[K], \{v\} = \begin{Bmatrix} u \\ \dot{u} \end{Bmatrix}$$

$$[G] = -[M]^{-1}[C], \{r(t)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M^{-1}F \end{Bmatrix} \quad (13)$$

假设已知 t_k 时刻梁的状态向量 $\{v(t_k)\}$, 则在 $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ 时刻, 梁的状态向量 $\{v(t_{k+1})\}$ 为^[7]

$$\{v(t_{k+1})\} = [T(\Delta t)](\{v(t_k)\} - \{v_p(t_k)\}) + \{v_p(t_{k+1})\} \quad (14)$$

对于 $[T(\Delta t)]$ 的精细计算, 是众所周知的^[7, 9-10]。而对于特解 $\{v_p(t)\}$ 的推导, 在车桥耦合问题中, 其荷载存在含有时间的线性式和简谐式两种形式, 将其向单元节点分解最终得到多项式外载和多项式调制的简谐外载两种形式外载。两种形式外载的特解推导列式参见文献[12]。

5 求解车桥系统随机响应的虚拟激励法

在车桥耦合系统中, 对于式(10)中的确定性激励 $\{f_1\}$ 可以采用三种精细积分格式直接求解, 由于其过程简单, 这里不再详述。而对于随机性激励 $\{f_2\}$, 则需要采用虚拟激励法将其转化为确定性的虚拟简谐激励, 进而使用三种精细积分格式进行求解。不考虑确定性激励部分, 可以得到车桥系统随机振动方程:

$$[\bar{M}]\{\ddot{U}\} + [\bar{C}]\{\dot{U}\} + [\bar{K}]\{U\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 1 \end{Bmatrix} (c_1 \dot{W} + k_1 W) - \begin{Bmatrix} \{R_f\} \\ 0 \end{Bmatrix} M_1 \ddot{W} \quad (15)$$

方程右端的随机激励是由桥面随机不平度产生的。对于车辆通过有限长的桥的问题, 应该将随机激励视作非平稳的, 相应的竖向虚拟位移激励为

$$\tilde{W} = \sqrt{S_r} \tilde{g}(x) e^{i\alpha} = \sqrt{S_r} \tilde{g}(Vt) e^{i\omega Vt} \quad (16)$$

将路面的虚拟位移激励对时间求一阶和二阶导数, 分别得到路面的虚拟速度激励 $\dot{\tilde{W}}$ 和虚拟加

速度激励 \ddot{W} , 然后将 \ddot{W} 、 \dot{W} 、 \ddot{W} 和式(16)代入式(15), 并将方程左端随时间变化的项移到方程的右端, 得到常系数的确定性激励的动力方程:

$$[M]\{\ddot{U}\} + [C]\{\dot{U}\} + [K]\{U\} = - \begin{Bmatrix} \{R_f\} \\ 0 \end{Bmatrix} (M_2\ddot{Z} + M_1\ddot{y} + M_1\ddot{W}) + \begin{Bmatrix} \{0\} \\ 1 \end{Bmatrix} (c_1\dot{y} + k_1y + c_1\dot{W} + k_1W) \quad (17)$$

式中

$$[M] = \begin{bmatrix} [M'] & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} [C'] & 0 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}, \\ [K] = \begin{bmatrix} [K] & 0 \\ 0 & k_1 \end{bmatrix}$$

方程右端的激励项为多项式形式和多项式调制的简谐形式, 给定系统的初始条件, 可以直接使用上一节的精细积分格式进行求解。同时由于激励项中存在方程左端待求的未知量, 所以需要使用精细积分方法进行迭代求解。最终可以求得系统的虚拟位移响应:

$$\{\tilde{Q}(\omega, t)\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{Y}(\omega, t)\} \\ \{\tilde{Z}(\omega, t)\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

进而根据虚拟激励方法可以很方便地得到系统随机振动响应的时变功率谱矩阵, 即

$$[S_{qq}(\omega, t)] = \{\tilde{Q}(\omega, t)\}^* \cdot \{\tilde{Q}(\omega, t)\}^T \quad (19)$$

得到了时变的功率谱矩阵以后, 可以进一步求解工程上需要的各个统计量, 例如响应的均方值等。

6 数值算例

本文分别对匀速移动车辆作用下的简支梁和三跨弹性支撑非均匀梁由路面不平度产生的随机响应进行了计算。首先采用振型分解法将系统运动方程解耦降阶, 然后用 Newmark 法和上述三种精细积分法分别计算了车厢和桥梁竖向随机位移响应, 并对四种计算方法的计算精度和效率进行了比较。为了便于比较多种计算精度, 所有均方值都取 6 位有效数。

另外, 本文还给出了两种初始条件: 一种是零初始条件, 即车辆在桥的左端点时初始位移和初始

速度都为零; 另一种是非零初始条件, 即让车辆从上桥前一段距离处由静止开始的匀速运动(假定桥面和路面的不平度相同, 但路面无限刚硬), 当车到达桥头时, 就会有非零初始速度和位移。这种初始条件显然更为切合实际一些。用数值结果比较了初始条件对系统响应的影响。

6.1 简支梁受匀速车辆作用时动力响应的数值计算

桥长 $L = 50 \text{ m}$, 单位长度质量 $\bar{m} = 6067 \text{ kg/m}$, 抗弯刚度 $EI = 2.658 \times 10^9 \text{ N m}^2$ 。桥梁的阻尼阵 $[C] = \alpha[M'] + \beta[K']$, 其中比例系数分别为 $\alpha = 0.16(1/\text{s})$ 和 $\beta = 0.003(\text{s})$ 。运行车辆参数为: $M_1 = 12000 \text{ kg}$, $M_2 = 1000 \text{ kg}$, $k_1 = 280000 \text{ N/m}$, $c_1 = 2\zeta(M_1k_1)^{0.5}$, 其中 $\zeta = 0.05$ 。小车从某一初始状态以匀速 $V = 50 \text{ m/s}$ 从桥梁左端点向右匀速运动。路面不平度 $W(x) = \tilde{g}(x)r(x)$, 其中 $r(x)$ 功率谱函数 $S_{r(x)}$ 根据美国联邦铁路管理局的实测数据求得^[13]:

$$S_{r(x)}(\Omega) = 0.25 \times 10^{-4} \frac{0.2095 \times 0.8245^2}{\Omega^2 \times (\Omega^2 + 0.8245^2)}$$

式中空间波数 $\Omega = 2\pi f$, f 为空间频率, 取值范围主要集中在 $0.005 \sim 0.8(1/\text{m})$, 均匀调制函数:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 50 \end{cases}$$

参考解取计算精度最高的精细积分协调分解法的结果(全桥划分 100 个单元, 积分 1000 步); 用 Newmark 方法(将全桥划分 100 个单元积分 20000 步)也能得到相差不到 0.005% 的结果。

首先, 比较两种不同初始条件下得到的结果可以看出, 当车辆系统的阻尼比为 5% 时, 初始条件的影响在车辆上桥以后很快衰减, 以至于当车到中跨时, 对于车厢或桥竖向位移均方值的影响都不到 0.001%, 可谓微乎其微。对于多种不同初始状态的比较皆为如此, 在实际计算中, 可以不必考虑初始条件的影响。

表 1 给出了桥梁中点位置位移的均方值, 可以看到, 三种精细积分方法均可用大步长得到较好的计算结果, 在相同的计算精度要求下, 计算效率较 Newmark 方法都有很大提高。例如, 为达到 1% 的精度要求, 如果使用 Newmark 方法需要 300 个积分步, 15.69 s 计算时间。三种精细积分格式都仅需要 20 个积分步, 计算时间分别为 1.017 s(简单分

表 1 车辆运行到桥梁中点时桥梁中点位移的均方值

Tab. 1 RMS value for the mid-point displacement of the bridge when the vehicle reaches to that point

计算方法	划分单元数	积分步数	零初始条件		非零初始条件		计算时间 (s)
			参考解: 0. 239708(mm)		参考解: 0. 239708(mm)		
			均方值 $\times 10^{-3}$ (m)	计算误差(%)	均方值 $\times 10^{-3}$ (m)	计算误差(%)	
Newmark	20	20	0. 517313	115. 81%	0. 521937	117. 74%	0. 795
	50	50	0. 263648	9. 99%	0. 264324	10. 27%	1. 938
	50	100	0. 247570	3. 28%	0. 247628	3. 30%	3. 813
	100	300	0. 241719	0. 84%	0. 241720	0. 84%	15. 69
	100	1000	0. 240199	0. 20%	0. 240199	0. 20%	51. 27
	100	10000	0. 239731	0. 01%	0. 239731	0. 01%	505. 53
简单分解	20	20	0. 238757	- 0. 40%	0. 238911	- 0. 33%	1. 017
	50	50	0. 239134	- 0. 24%	0. 239129	- 0. 24%	4. 094
	100	100	0. 239464	- 0. 10%	0. 239461	- 0. 10%	12. 66
	100	300	0. 239696	- 0. 01%	0. 239696	- 0. 01%	41. 27
混合分解	20	20	0. 238715	- 0. 41%	0. 238825	- 0. 37%	1. 278
	50	50	0. 239061	- 0. 27%	0. 239057	- 0. 27%	4. 906
	100	100	0. 239385	- 0. 14%	0. 239384	- 0. 14%	14. 31
	100	300	0. 239697	0. 00%	0. 239696	- 0. 01%	46. 38
协调分解	20	20	0. 239385	- 0. 14%	0. 239537	- 0. 07%	2. 407
	50	50	0. 239328	- 0. 16%	0. 239323	- 0. 16%	7. 031
	100	100	0. 239562	- 0. 06%	0. 239560	- 0. 06%	22. 88
	100	300	0. 239733	0. 01%	0. 239733	0. 01%	67. 58

解)、1. 278 s(混合分解) 和 2. 407 s(协调分解)。其所需计算时间的比例为 100: 6. 5: 8. 2: 15. 3。精细积分法可提高计算效率约一个数量级。如果将精度控制在 0. 5% 以内, 则所需计算时间的比例为: 100: 2. 0: 2. 5: 4. 7。精细积分格式较 Newmark 方法在计算效率上提高了 1 ~ 2 个数量级。从桥梁响应的计算结果还可以看出, 在相同积分步长条件下, 协调分解的计算精度要高于简单分解。

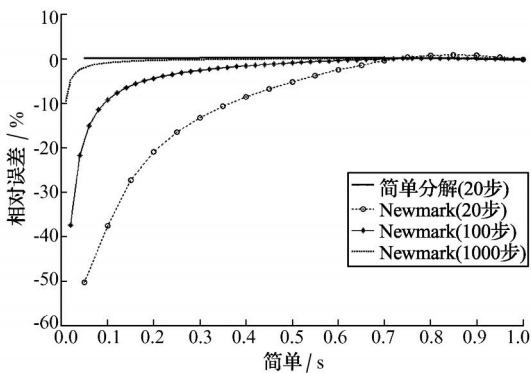


图 2 车辆过桥时车厢竖向位移的均方值相对误差曲线
Fig. 2 The relative error curve of the RMS value for the displacement of carriage mass

图 2 给出了车辆在零初始条件下通过桥梁的整个过程中车厢竖向位移响应的均方值相对误差曲线, 其中横坐标为车辆在桥梁上运行的不同时刻, 纵坐标为该时刻车厢竖向位移均方值相对于参考解的误差。从该图中可以看出在车辆过桥的整个过程中, 简单分解采用 20 个积分步得到的计算结

果要优于 Newmark 方法采用 1000 个积分步得到的结果。协调分解与混合分解采用 20 个积分步将得到更为精确的结果, 但曲线与简单分解法曲线用肉眼难于分辨, 故不予画出。

6.2 三跨弹性支承非均匀梁受匀速车辆作用时动力响应的数值计算

三跨弹性支承梁左右跨长均为 30 m, 抗弯刚度为 $EI = 7. 48 \times 10^{10} \text{ Nm}^2$, 线密度 $\bar{m} = 10 \times 10^3 \text{ kg/m}$ 。中间跨长为 40 m, 抗弯刚度为 $EI = 2. 46 \times 10^{11} \text{ Nm}^2$, 线密度 $\bar{m} = 15 \times 10^3 \text{ kg/m}$ 。支承弹簧的刚度为 $k = 2. 065 \times 10^6 \text{ N/m}$ 。桥梁的阻尼阵 $[C'] = \alpha[M'] + \beta[K']$, 其中 $\alpha = 0. 45(1/\text{s})$, $\beta = 0. 0004(\text{s})$ 。运行车辆参数为 $M_1 = 15000 \text{ kg}$, $M_2 = 2000 \text{ kg}$, $k_1 = 220000 \text{ N/m}$, $c_1 = 2\zeta(M_1 k_1)^{0.5}$, 其中 $\zeta = 0. 05$ 。车辆从某一初始状态以匀速 $V = 40 \text{ m/s}$ 从桥梁左端点向右运行。路面不平度 $W(x) = \tilde{g}(x)r(x)$, 其中空间平稳随机过程 $r(x)$ 的功率谱函数 $S_{r(x)}$ 根据我国某干线无缝轨道的实测数据求得^[13]:

$$S_{r(x)} = 2. 755 \times 10^{-9} \frac{f^2 + 8. 879 \times 10^{-1}}{f^4 + 2. 524 \times f^2 \times 10^{-2} + 9. 61 \times 10^{-7}}$$

式中 f 的取值范围主要集中在 0. 005 ~ 0. 5(1/m), 均匀调制函数:

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 100 \end{cases}$$

表 2 车辆运行到桥梁中点时车厢位移的均方值

Tab. 2 RMS value for the displacement of carriage mass when the vehicle reaches to mid point of the bridge

计算方法	划分单元数	积分步数	零初始条件		非零初始条件		计算时间 (s)
			参考解: 6 081662 (mm)		参考解: 6 081663 (mm)		
			均方值 $\times 10^{-3}$ (m)	计算误差(%)	均方值 $\times 10^{-3}$ (m)	计算误差(%)	
Newmark	20	20	5 606151	- 7.82%	5 606161	- 7.82%	3 984
	20	40	5 920813	- 2.64%	5 920809	- 2.64%	11 500
	50	100	6 004273	- 1.27%	6 004273	- 1.27%	22 656
	50	300	6 057882	- 0.39%	6 057883	- 0.39%	96 454
	100	1000	6 074733	- 0.11%	6 074734	- 0.11%	335 252
	100	10000	6 080962	- 0.01%	6 080963	- 0.01%	3297 751
简单分解	10	10	6 100822	0.32%	6 100836	0.32%	2 622
	20	20	6 087773	0.10%	6 087771	0.10%	6 520
	20	100	6 082579	0.02%	6 082580	0.02%	31 765
混合分解	10	10	6 100802	0.31%	6 100810	0.31%	3 445
	20	20	6 087553	0.10%	6 087550	0.10%	8 142
	20	100	6 082089	0.01%	6 082090	0.01%	39 312
协调分解	10	10	6 099930	0.30%	6 099945	0.30%	4 361
	20	20	6 087502	0.10%	6 087499	0.10%	11 391
	20	100	6 082072	0.01%	6 082073	0.01%	52 687

参考解取计算精度最高的精细积分协调分解法的结果(全桥划分 100 个单元,积分 2000 步);用 Newmark 方法(将全桥划分 100 个单元积分 20000 步)也能得到相差不到 0.001% 的结果。

通过计算得到了与例题一类似的结论,取车辆系统的阻尼比为 5% 时,初始条件对于计算结果的影响很小,在实际计算中完全可以忽略不计。另外,从表 2 中可以看出,在计算车辆随机响应时,三种精细积分方法较 Newmark 方法在计算精度和效率上依然有很大提高。为达到 1% 的精度,Newmark 方法用 96.454 s 计算时间;精细积分方法则需要 2.622~4.361s,计算效率提高了 20~40 倍。如果将精度控制在 0.1%,Newmark 方法需要使用 1000 个积分步,花费 335.25 s 计算时间,而三种精细积分方法仅需要 20 个积分步,计算时间分别为 6.520 s(简单分解)、8.142 s(混合分解)和 11.391 s(协调分解)。其所需计算时间的比例为 100:1.9:2.4:3.4,精细积分方法提高计算效率约 30~50 倍。

本文第二节提出的积分步内时间线性插值的迭代方法简便,效果明显。在本文的精细积分计算中全部仅迭代三次已获得稳定收敛的效果。采用这一插值手段使得本文提出的三种精细积分方法对于车辆随机响应的计算效率较 Newmark 方法提高了 1~2 个数量级,而对于桥梁响应则计算效率较 Newmark 方法提高了数十倍。

7 结 论

本文提出了车桥耦合系统非平稳随机振动分析的新的方法,采用高效精确的虚拟激励法,将随机性问题转化为确定性分析。通过三种精细积分格式进行大量数值积分计算表明:与广泛采用的 Newmark 方法相比,本文提出的 PEM-PIM 算法在计算精度和计算效率上均有显著的提高。

参考文献(References):

- [1] 雷晓燕,毛利军. 线路随机不平顺对车辆-轨道耦合系统动力响应分析[J]. 中国铁道科学, 2001, 22(6): 38-43. (LEI Xiaoyan, MAO Lijun. Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of rail vertical profile[J]. *China Railway Science*, 2001, 22(6): 38-43. (in Chinese))
- [2] 赵春发,翟婉明,王开云. 磁悬浮车辆随机振动响应分析及其平稳行研究[J]. 中国机械工程, 2002, 13(16): 1402-1406. (ZHAO Chunfa, ZHAI Warming, WANG Kaiyun. A study on maglev vehicle vertical random vibration and ride quality[J]. *China Mechanical Engineering*, 2001, 13(16): 1402-1406. (in Chinese))
- [3] CHENG Y K, AU F T K, ZHEN D Z, et al. Vibration of multi-span non-uniform bridges under moving vehicle and trains by using modified vibration functions[J]. *Sound and Vibration*, 1999, 228(3): 61-7

- 628.
- [4] 夏 禾. 车辆与结构动力相互作用[M]. 北京: 科学出版社, 2002. (XIA He. *Dynamic Interactions between Vehicles and Structures* [M]. Beijing: Science Press, 2002. (in Chinese))
- [5] LEE S Y, YHIM S S. Dynamic behavior of long span box girder bridges subjected to moving loads numerical analysis and experimental verification[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, **42**(18): 5021-5035.
- [6] LAW S S, ZHU X Q. Bridge dynamic responses due to road surface roughness and braking of vehicle[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, **282**(3-5): 805-830.
- [7] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (LIN Jia hao, ZHANG Ya hui. *Pseudo Excitation Method in Random Vibration* [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese))
- [8] LIN J H, ZHANG Y H. *Vibration and Shock Handbook* [M]. Florida CRC Press: Boca Raton, 2005.
- [9] ZHONG W X. *Duality System in Applied Mechanics and Optimal Control* [M]. Boston: Kluwer Academic Pub, 2004.
- [10] ZHONG W X, WILLIAMS F W. A precise time step integration method[J]. *J Mech Engrg Sci, Proc Inst Mech Eng, Part C*, 1994, **208**(C6): 427-430.
- [11] ZIENKIEWICZ O C. *The Finite Element Method* [M]. Third Edition. McGraw Hill Inc., 1977.
- [12] 张志超, 林家浩. 移动质量作用下桥梁响应的精细积分[J]. 大连理工大学学报, 2006, **46**(s): 22-28. (ZHANG Zhi chao, LIN Jia hao. Precise integration of bridge responses due to a moving mass [J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 2006, **46**(s): 22-28. (in Chinese))
- [13] 翟婉明. 车辆-轨道耦合动力学[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002. (ZHAI Wan ming. *Vehicle-Track Coupling Dynamics* [M]. Beijing: China Railway Press, 2001 (in Chinese))
- [14] 林家浩, 张守云, 吕 峰, 等. 移动简谐荷载作用下桥梁响应的高效计算[J]. 计算力学学报, 2006, **23**(4): 385-390. (LIN Jia hao, ZHANG Shou yun, LÜ Feng, et al. Precise integration for bridges subjected to moving harmonic loads[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2006, **23**(4): 385-390. (in Chinese))

Combined PEM-PIM scheme for the non-stationary random vibration analysis of vehicle-bridge systems

ZHANG Zhi chao, ZHANG Ya hui, ZHAO Yan*, LIN Jia hao

(Faculty of Vehicle Engineering and Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis and Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract: Non-stationary random vibration of vehicle-bridge coupling systems subjected to the action of irregular road surface is investigated in this paper. Pseudo-excitation method (PEM) is applied firstly to transform the random surface roughness into the superposition of a series of deterministic pseudo harmonic surface unevenness and thus simplifies the solution of the dynamic equations considerably. Three alternative formats of precise integration method (PIM) are presented to compute the vertical vibration responses due to the pseudo harmonic unevenness. They can well simulate the continuous varying of the road forces exerting on the vehicle both in the time and space domains, and thus have remarkably overcome the shortcomings of the conventional numerical integration methods, such as the Newmark method. Numerical results show that, the proposed combined PEM-PIM scheme is much more accurate and efficient than the widely used Newmark method for the random responses analysis of vehicle-bridge coupling systems.

Key words: vehicle-bridge system; precise integration method; pseudo excitation method; surface roughness