

DOI: 10.7511/jslx201704003

基于广义 Lambda 分布逼近的结构可靠度计算方法

范兴朗¹, 董玲珑², 吴熙^{*3}

(1. 浙江工业大学 建筑工程学院, 杭州 310014; 2. 杭州市市政公用建设开发公司, 杭州 310000;
3. 浙江大学城市学院 工程学院, 杭州 310015)

摘要:提出了基于广义 Lambda 分布逼近的结构可靠度计算方法。首先利用功能函数抽样数据, 估计功能函数的前 4 阶矩信息。通过点估计法获得功能函数概率密度函数广义 Lambda 分布近似表达式, 并根据工程结构可靠性的定义计算结构失效概率, 进行可靠性分析。数值算例表明, 广义 Lambda 分布对各种经典分布曲线具有良好的适应性。通过两个工程算例与 Monte-Carlo 模拟结果进行对比, 验证了所提可靠度计算方法的正确性和实用性。

关键词:广义 lambda 分布; 逼近; 失效概率; 中心矩

中图分类号: TU312; O213.2

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2017)04-0417-05

1 引言

目前国际上的主流规范均已将结构可靠性理论应用于结构分析和设计^[1-4]。结构可靠度计算方法是结构可靠性理论的一个重要研究课题, 关系到结构可靠度理论在实际工程结构中的使用, 并且对正确评价结构的可靠性和安全性起着十分重要的作用。

计算结构可靠度的传统方法主要有一次二阶矩法、二次二阶矩法和 Monte-Carlo 模拟方法等^[5]。一次二阶矩和二次二阶矩方法必须事先知道基本变量的分布类型及功能函数的显式表达式, 结构可靠度的精度由随机变量的概率分布模型及其统计参数决定^[6]。对于复杂工程结构, 由于随机变量的小样本容量特点, 其参数估计以及假设检验方法成为影响该类方法精度的主要障碍^[7]。Monte-Carlo 方法由于其巨大的计算量要求, 使其不适合用于大型工程结构的可靠度计算。尽管目前提出了一些如重要性抽样等抽样技术, 其计算量仍然较大^[8-10]。

过去的 30 年中研究人员提出了一些其他替代方案。可靠度矩法是其中的一类主要方法。可靠度矩法利用随机变量的无穷矩系列与概率密度函数的等价性, 通过基本随机变量的各阶矩或者通过直接抽样等方法获取功能函数的各阶矩, 再利用最

大熵原理^[11-14]或者函数逼近^[15]近似得到功能函数的概率密度函数, 计算结构的失效概率。最大熵原理通过引入 Shannon 信息论中的信息熵概念, 利用获得随机变量的少量统计样本值, 即可求得随机变量的概率密度函数。该方法有效利用了样本中给定的信息, 能够准确预测概率密度分布以及相关参数。实际计算表明^[16-18], 该方法需要求解高度非线性积分方程组, 传统的非线性求解方法往往难于收敛, 且其收敛性严重依赖于初始值的选取。函数逼近法通过在给定函数内积空间, 以随机变量各阶矩为约束条件, 假定随机变量概率密度函数为该函数内积空间基函数的线性组合, 通过最小二乘法拟合, 即可确定基函数的组合系数, 从而得到随机变量的概率密度函数。邓建等^[19]以多项式函数作为基函数对概率密度函数进行拟合。计算结果表明, 当多项式函数阶数较高时, 区间两端存在较为严重波动现象^[20]。为了克服该缺陷, 在文献^[19]的研究基础上, 文献^[20]采用 Legendre 正交多项式对概率密度函数进行逼近。该方法计算过程较为简单, 求解过程稳定, 但是计算中需利用高阶矩信息以保证其计算精度。由于高阶矩估计的精度对样本数据的敏感性较大, 限制了该方法的进一步应用。

由于广义 Lambda 分布对于各种分布曲线均具有良好的适应性且其参数估计只需利用样本数据的前 4 阶矩, 可以有效地解决正交多项式基函数需要利用随机变量高阶矩的缺陷。本文在前人研究成果基础上, 利用样本数据的前 4 阶矩信息, 通过引入广义 Lambda 分布函数对功能函数概率密度函数进行拟合, 进而计算结构失效概率, 并与其

收稿日期: 2016-05-25; 修改稿收到日期: 2016-11-20。
基金项目: 浙江省自然科学基金(LQ15E080010)资助项目。
作者简介: 吴熙*(1985-), 女, 副教授
(E-mail: wuxi@zju.edu.cn).

他常用算法进行对比。

2 广义 Lambda 分布及其参数确定

广义 Lambda 分布通过其分位数函数 $Q(y)$ (即累积分布函数的反函数) 进行定义, $Q(y)$ 可表达为

$$Q(y) = \lambda_1 + [y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}] / \lambda_2 \quad (1)$$

式中 $y \in [0, 1]$, λ_1 和 λ_2 分别为分布的位置参数与尺度参数, λ_3 和 λ_4 与分布的形状有关。

在分位数函数的基础上, 根据反函数求导法则, 可以得到广义 Lambda 分布的概率密度函数为

$$f(x) = f(Q(y)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_3 y^{\lambda_3-1} + \lambda_4 (1-y)^{\lambda_4-1}} \quad (2)$$

应该指出, 概率密度函数 $f(x)$ 必须满足以下两个条件,

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \end{cases} \quad (3)$$

确定参数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和 λ_4 的方法主要有矩估计法和非线性最小二乘法。由于对于已知样本各阶矩估计值容易得到, 且矩估计法具有简单性和应用广泛性等特点, 本文采用矩估计法确定广义 Lambda 分布函数参数。

广义 Lambda 分布函数的均值、方差、偏度系数及峰度系数可由以下方程计算得到。

$$\alpha_1 = \mu = E(X) = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2} \quad (4)$$

$$\alpha_2 = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2] = \frac{B - A^2}{\lambda_2^2} \quad (5)$$

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - \mu)^3]}{\sigma^3} = \frac{C - 3AB + 2A^2}{\lambda_2^3 \sigma^3} \quad (6)$$

$$\alpha_4 = \frac{E[(X - \mu)^4]}{\sigma^4} = \frac{D - 4AC + 6A^2B - 3A^4}{\lambda_2^4 \sigma^4} \quad (7)$$

式中

$$A = \frac{1}{1 + \lambda_3} - \frac{1}{1 + \lambda_4} \quad (8)$$

$$B = \frac{1}{1 + 2\lambda_3} + \frac{1}{1 + 2\lambda_4} - 2\beta(1 + \lambda_3, 1 + \lambda_4) \quad (9)$$

$$C = \frac{1}{1 + 3\lambda_3} - \frac{1}{1 + 3\lambda_4} - 3\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + \lambda_4) + 3\beta(1 + \lambda_3, 1 + 2\lambda_4) \quad (10)$$

$$D = \frac{1}{1 + 4\lambda_3} + \frac{1}{1 + 4\lambda_4} - 4\beta(1 + 3\lambda_3, 1 + \lambda_4) + 6\beta(1 + 2\lambda_3, 1 + 2\lambda_4) - 4\beta(1 + \lambda_3, 1 + 3\lambda_4) \quad (11)$$

式(9~11)的 $\beta(\cdot, \cdot)$ 表示 Beta 函数, 由下式定义:

$$\forall (e, f) \in R_+^2, \beta(e, f) = \int_0^1 x^{e-1} (1-x)^{f-1} dx \quad (12)$$

对于已知样本数据, 相应的前两阶样本矩、偏度系数以及峰度系数分别定义为

$$\hat{\alpha}_1 = \bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}, \hat{\alpha}_2 = \hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad (13, 14)$$

$$\hat{\alpha}_3 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^3}{n \hat{\sigma}^3}, \hat{\alpha}_4 = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^4}{n \hat{\sigma}^4} \quad (15, 16)$$

从式(6,7)可以看出, α_3 与 α_4 的量值仅取决于参数 λ_3 和 λ_4 , 大大简化了参数估计的计算工作量。参数 λ_3 和 λ_4 可以通过对如下目标函数 $S(\lambda_3, \lambda_4)$ 进行最小化得到。

$$S(\lambda_3, \lambda_4) = (\alpha_3 - \hat{\alpha}_3)^2 + (\alpha_4 - \hat{\alpha}_4)^2 \quad (17)$$

确定参数 λ_3 和 λ_4 后, 即可求得系数 A 与 B。参数 λ_1 和 λ_2 可以通过式(18,19)计算得到。

$$\hat{\alpha}_1 = \alpha_1 = \lambda_1 + \frac{A}{\lambda_2}, \hat{\alpha}_2 = \alpha_2 = \frac{B - A^2}{\lambda_2^2} \quad (18, 19)$$

3 结构可靠度分析的广义 Lambda 分布逼近法

在结构可靠度分析中, 关键是确定功能函数的概率密度函数, 进而计算结构失效概率。基于广义 Lambda 分布函数, 结构功能函数的概率密度函数及失效概率可以通过下列步骤计算。

(1) 建立工程结构功能函数表达式 $Z = g(\mathbf{X})$, 其中 \mathbf{X} 为基本随机向量, 可以表示为 $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T$ 。

(2) 根据基本随机向量 \mathbf{X} 的统计特征, 对功能函数 $Z = g(\mathbf{X})$ 进行抽样。

(3) 根据抽样结果, 计算功能函数统计数字特征, 即平均值、方差 $\hat{\alpha}_1$ 和 $\hat{\alpha}_2$ 、偏度系数 $\hat{\alpha}_3$ 以及峰度系数 $\hat{\alpha}_4$ 。

(4) 选择参数 λ_3 和 λ_4 的合适初始值, 采用 Nelder 和 Mead 单纯形法计算目标函数 $S(\lambda_3, \lambda_4)$ 的最小值并求得 λ_3 和 λ_4 。

(5) 计算工程结构的失效概率 P_f 。一般情况下, 可通过求解方程(20)的根来确定失效概率:

$$\lambda_1 + \frac{y^{\lambda_3} - (1-y)^{\lambda_4}}{\lambda_2} = 0 \quad (20)$$

4 数值算例

算例分成两个部分, 第一部分通过拟合四种经典分布来说明广义 Lambda 分布拟合的良好适应性, 第二部分通过两个工程简单算例对比了本文方法与 Monte-Carlo 法的效率, 并与一次二阶矩方法

计算精度进行了比较。

4.1 经典分布拟合

表 1 列出了四种经典分布类型参数及其广义 Lambda 分布拟合结果。图 1~图 4 分别比较了各种分布曲线与广义 Lambda 分布拟合曲线。可以看出,广义 Lambda 分布曲线对表 1 所列四种经典分布曲线拟合良好。对于四种经典分布曲线,其相应的广义 Lambda 分布拟合函数的最大相对误差分别为 0.5%,6.5%,0.64%和 5.7%。由此可以看出,广义 Lambda 分布函数对于经典曲线具有良好的适应性。应该指出的是,对于广义 Lambda 分布函数的参数估计,通常情况下 2~3 次迭代就能

收敛到正确值。

4.2 工程算例

算例 1 已知构件的功能函数 $Z=R-S$, R 服从正态分布, $\mu_R=20, \sigma_R=4$; S 服从极值 I 型分布, $\mu_S=14, \sigma_S=3.5$, 计算该构件失效概率 P_f 。首先对功能函数抽样 500 次并估计其前 4 阶矩, 计算广义 Lambda 分布参数。其功能函数概率密度函数的广义 Lambda 分布拟合结果与 Monte-Carlo 模拟结果比较如图 5 所示。按本文方法计算失效概率 P_f 为 0.1268, Monte-Carlo 模拟 1×10^6 次的构件失效概率 P_f 为 0.1266, 按照 JC 法(即修正一次二阶矩法)进行计算, 构件失效概率结果为 0.1133。

表 1 分布类型及广义 Lambda 分布拟合参数

Tab. 1 Distribution types and parameters for the approximated generalized Lambda distribution

类型	分布表达式	参数	广义 Lambda 分布参数
正态	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$	$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$ $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = 3$	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0.1975$ $\lambda_3 = 0.1349, \lambda_4 = 0.1349$
对数正态	$f(x) = \frac{3}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{9(\ln(x))^2}{2\sigma^2}\right)$	$\alpha_1 = 1.0571, \alpha_2 = 0.1313$ $\alpha_3 = 1.0687, \alpha_4 = 5.0974$	$\lambda_1 = 0.8451, \lambda_2 = 0.1085$ $\lambda_3 = 0.0102, \lambda_4 = 0.0342$
Weibull	$f(x) = 5x^4 \exp(-x^5)$	$\alpha_1 = 0.9182, \alpha_2 = 0.0442$ $\alpha_3 = -0.2541, \alpha_4 = 2.8802$	$\lambda_1 = 0.9935, \lambda_2 = 1.0491$ $\lambda_3 = 0.2121, \lambda_4 = 0.1061$
极值 I 型	$f(x) = e^{-x} \exp(-e^{-x})$	$\alpha_1 = 0.5772, \alpha_2 = 1.6449$ $\alpha_3 = 1.1395, \alpha_4 = 5.0$	$\lambda_1 = -0.1857, \lambda_2 = 0.0211$ $\lambda_3 = 0.0067, \lambda_4 = 0.0233$

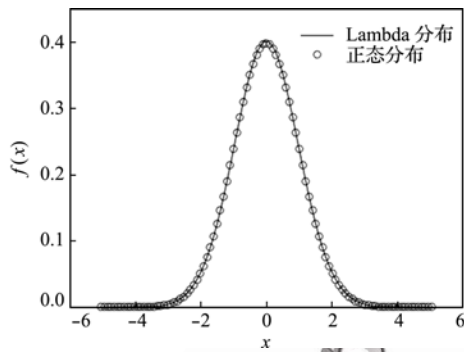


图 1 正态分布拟合结果

Fig. 1 Comparisons between normal distribution and fitted generalized Lambda distribution

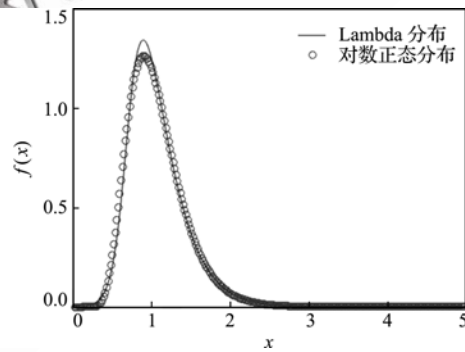


图 2 对数正态分布拟合结果

Fig. 2 Comparisons between Lognormal distribution and fitted generalized Lambda distribution

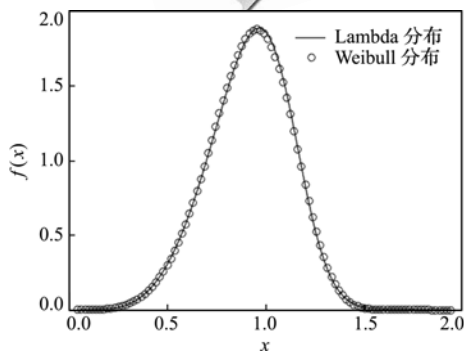


图 3 Weibull 分布拟合结果

Fig. 3 Comparisons between Weibull distribution and fitted generalized Lambda distribution

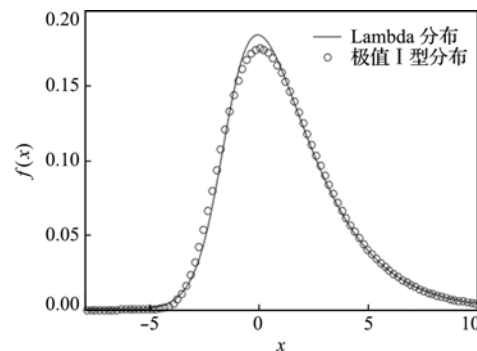


图 4 极值 I 型分布拟合结果

Fig. 4 Comparisons between Type-I extreme value distribution and fitted generalized Lambda distribution

算例 2 设结构的极限状态方程为 $Z = X_2 - 8100(X_1 + X_4)/X_3^2 = 0$, 其中 X_1 服从正态分布, X_2 和 X_3 服从对数正态分布, X_4 服从极值 I 型分布, 均值 $\mu_x = (60, 2000, 24, 50)^T$, 标准差 $\sigma_x = (6.0, 74.0, 1.2, 10.0)^T$, 计算该结构失效概率 P_f . 其功能函数概率密度函数广义 Lambda 分布拟合结果与 Monte-Carlo 模拟结果比较如图 5 所示. 按本文方法计算失效概率 P_f 为 4.27×10^{-2} , Monte-Carlo 模拟 1×10^7 次的构件失效概率 P_f 为 4.36×10^{-2} , 按照 JC 法 (即修正一次二阶矩法) 进行计算, 构件失效概率结果为 3.9×10^{-2} .

从算例 1 与算例 2 可以看出, 相对于 Monte-Carlo 法, 本文方法可以在不损失计算精度的情况下 (相比于 JC 法) 极大提高计算效率, 为大型复杂工程结构的可靠度分析提供了一个新的思路.

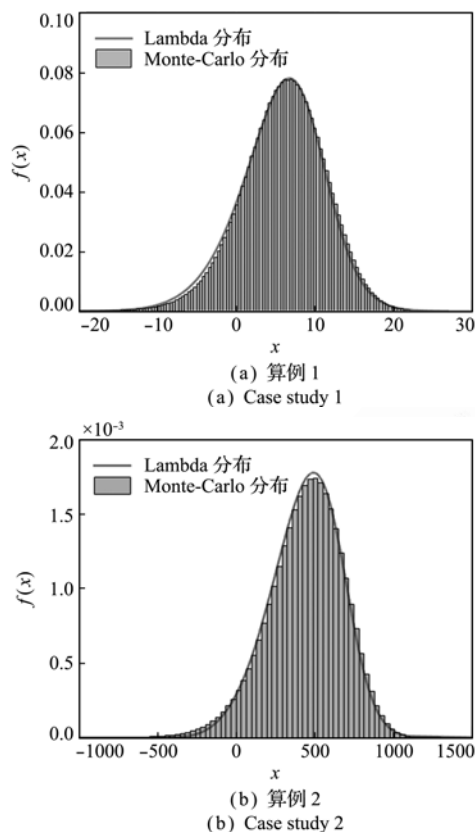


图 5 Lambda 分布拟合功能函数概率密度函数与 Monte-Carlo 模拟结果比较

Fig. 5 Comparisons of probability density function between generalized Lambda distribution approximation and Monte-Carlo simulation for case study 1 and case study 2

5 结 论

工程结构可靠度计算中, 功能函数的概率密度函数往往是未知的. 本文充分利用结构随机变量

的前 4 阶矩信息, 提出了基于广义 Lambda 分布函数的结构可靠度计算方法. 研究表明,

(1) 广义 Lambda 分布参数估计较简便, 通常只需迭代 2~3 次即可得到满意精度.

(2) 广义 Lambda 分布对于经典分布具有良好的适应性.

(3) 基于广义 Lambda 分布理论计算结构可靠度方法事先无需知道功能函数显式表达式, 只需根据功能函数样本数据得到样本数据前 4 阶矩信息.

(4) 相比于 Monte-Carlo 模拟, 基于广义 Lambda 分布理论计算结构可靠度的方法可以在不损失精度的情况下较大提高计算效率, 适合于大型复杂结构可靠度计算.

参考文献 (References):

- [1] BSI. *Eurocode: Basis of Structural Design* [M]. BSI, 2002.
- [2] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 工程结构可靠性设计统一标准 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2014. (Ministry of housing and urban rural development of the People's Republic of China. Unified Standard for Reliability Design of Engineering Structures [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2014. (in Chinese))
- [3] ASCE. *Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures* [M]. Amer Society of Civil Engineers, 1994.
- [4] ISO. *General Principles on Reliability for Structures* [S]. 1998.
- [5] 贡金鑫. 工程结构可靠度计算方法 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2003. (GONG Jin-xin. *Computational Methods for Engineering Structures* [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2003. (in Chinese))
- [6] 赵国藩, 曹居易, 张宽权. 工程结构可靠度 [M]. 北京: 水利电力出版社, 1984. (ZHAO Guo-fan, CAO Ju-yi, ZHANG Kuan-quan. *Reliability for Engineering Structures* [M]. Beijing: Hydraulic and Electric Power Press, 1984. (in Chinese))
- [7] 张明. 结构可靠度分析-方法与程序 [M]. 北京: 科学出版社, 2009. (ZHANG Ming. *Structural Reliability Analysis: Methods and Programs Random Variables* [M]. Beijing: Science Press, 2009. (in Chinese))
- [8] Mooney C Z. *Monte-Carlo Simulation* [M]. Los Angeles, Sage Publications, 1997.
- [9] Cadini F, Gioietta A. A Bayesian Monte Carlo-Based algorithm for the estimation of small failure probabilities of systems affected by uncertainties [J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, **153**: 15-27.

- [10] 赵维涛,张旭. 基于 Monte-Carlo 方法的结构系统可靠度计算及敏度分析[J]. 计算力学学报, 2011, **28**(2): 200-204. (ZHAO Wei-tao, ZHANG Xu. Reliability calculation and reliability sensitivity analysis of structural system based on Monte-Carlo method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2011, **28**(2): 200-204. (in Chinese))
- [11] Tribus M. *The Use of the Maximum Entropy Estimate in the Estimation of Reliability*[M]. Macmillan, New York, 1962.
- [12] Kapur J N. *Maximum-Entropy Models in Science and Engineering*[M]. John Wiley & Sons, 1989.
- [13] 李云贵,赵国藩. 结构可靠度的四阶矩分析法[J]. 大连理工大学学报, 1992, **32**(4): 455-459. (LI Yun-gui, ZHAO Guo-fan. Fourth order moment method for structural reliability analysis[J]. *Journal of Dalian University of Technology*, 1992, **32**(4): 455-459. (in Chinese))
- [14] 赖雄鸣,王成,张勇,等. 最大熵法在可靠度计算中的应用[J]. 计算力学学报, 2015, **32**(1): 41-47. (LAI Xiong-min, WANG Cheng, ZHANG Yong, et al. Application of maximum entropy method in reliability computation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, **32**(1): 41-47. (in Chinese))
- [15] 陈立周,何晓峰,翁海珊,等. 工程随机变量优化设计方法[M]. 北京:科学出版社, 1997. (CHEN Li-zhou, HE Xiao-feng, WENG Hai-shan, et al. *Optimization Design Methods for Engineering Random Variables* [M]. Beijing: Science Press, 1997. (in Chinese))
- [16] 郝志明,莫军,陈虬,等. 可靠性分析的最大熵法及同伦映射求解[J]. 固体力学学报, 2003, **24**(s): 222-225. (HAO Zhi-ming, MO Jun, CHEN Qiu, et al. Maximum entropy method of reliability analysis and its cognate transformation solution[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, **24**(s): 222-225. (in Chinese))
- [17] Bierig C, Chernov A. Approximation of probability density functions by the Multilevel Monte Carlo Maximum Entropy method[J]. *Journal of Computational Physics*, 2016, **314**: 661-681.
- [18] Jin C, Ding J. Solving Fredholm integral equations via a piecewise linear maximum entropy method[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, **304**: 130-137.
- [19] 邓建,李夕兵,古德生. 结构可靠性分析的多项式数值逼近法[J]. 计算力学学报, 2002, **19**(2): 212-216. (DENG Jian, LI Xi-bing, GU De-sheng. Numerical approximation method in reliability analysis of engineering structure[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2002, **19**(2): 212-216. (in Chinese))
- [20] 宫凤强,李夕兵. 基于 Legendre 正交多项式逼近法的结构可靠性分析[J]. 工程力学, 2008, **25**(6): 225-229. (GONG Feng-qiang, LI Xi-bing. Structural reliability analysis using Legendre orthogonal polynomial approximate method[J]. *Engineering Mechanics*, 2008, **25**(6): 225-229. (in Chinese))

Method for structural reliability analysis based on generalized Lambda distribution approximation

FAN Xing-lang¹, DONG Ling-long², WU Xi^{*3}

(1. School of Architecture and Civil Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China;

2. Hangzhou Municipal Public Construction and Development Corporation, Hangzhou 310000, China;

3. School of Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou 310015, China)

Abstract: A method for structural reliability analysis based on generalized Lambda distribution was proposed. The first four moments for the performance function of structures were estimated by the sampled data firstly. Then the approximate generalized Lambda distribution for the probability density function of the performance function was determined by point estimation method and the failure probability of structures was evaluated by the definition of structural reliability directly. Numerical case studies showed that the generalized Lambda distribution has excellent ability to match several famous distributions. Finally, the accuracy and efficiency of the proposed method were verified by comparing with the Monte-Carlo simulation results of two engineering examples.

Key words: generalized Lambda distribution; approximation; failure probability; central moments

引用本文/Cite this paper:

范兴朗,董玲珑,吴熙. 基于广义 Lambda 分布逼近的结构可靠度计算方法[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(4): 417-421.

FAN Xing-lang, DONG Ling-long, WU Xi. Method for structural reliability analysis based on generalized Lambda distribution approximation[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(4): 417-421.