

DOI: 10.7511/jslx201702002

变截面压杆稳定非线性微分方程边值问题的最优化算法研究

侯祥林^{*1}, 胡建强¹, 卢宏峰², 王春刚³

(1. 沈阳建筑大学 机械工程学院, 沈阳 110168; 2. 中国建筑东北设计研究院有限公司, 沈阳 110006;

3. 沈阳建筑大学 土木工程学院, 沈阳 110168)

摘要:针对任意约束类型的变截面受压杆件的稳定临界载荷计算问题, 结合非线性微分方程数值算法和最优化方法, 以起点边界的初始条件、待求临界荷载和附加约束力为设计变量; 以终点边值条件满足的函数关系与位型条件构建目标函数, 提出变截面压杆临界荷载和稳定位型的优化求解算法。应用 VB 编制通用的优化计算程序, 分析了典型算例; 通过对比发现, 本文以较少设计变量实现了临界荷载的高精度计算, 为工程应用提供参考。

关键词:压杆稳定; 非线性微分方程边值问题; 优化算法; 临界荷载; 位型

中图分类号: O342; O224

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2017)02-0137-06

1 引言

刚度、强度和稳定性是工程结构设计中最重要的问题。通常的结构设计是通过强度设计与刚度校核的方法。随着科学技术的发展, 钻杆结构和高耸结构等大型细长变截面受压构件的稳定计算问题显得越来越重要。常截面受压构件的稳定计算在材料力学和结构力学中有规范方法。等截面受压细长杆件可以通过经典欧拉公式 $F_{cr} = \pi^2 EI / (\mu l)^2$ ^[1,2] 直接求解临界力。当压杆为任意变截面时, 通常无法获得杆件临界荷载的解析解, 因此数值方法得到广泛应用。

变截面压杆临界荷载求解时, 目前常用静力法、模态摄动法、传递矩阵法和等效刚度法等。汤普森(Tompson)^[3]提出压杆稳定的静力法思想, 建立变截面承压件临界状态稳定方程, 应用贝塞尔函数求解。皮萨连科^[4]以大头截面为计算截面的压杆稳定性计算公式, 给出了配套的变截面压杆计算长度系数公式和表格。赵毅强^[5]以能量原理和结构力学相结合, 推导任意截面楔形杆的单元几何刚度矩阵和单元刚度矩阵, 求解了线性变化的锥形变截面承压构件。吴亚平^[6]采用等截面压杆的失稳问题代替变截面压杆的失稳问题求解, 以等效刚度

法为基础, 用等截面承压杆件代替变截面压杆, 求解变截面压杆的临界荷载。刘庆潭^[7]应用传递矩阵法求解多种复杂的变截面压杆的稳定问题。Lee 等^[8]求解了变截面形式为抛物线、正弦曲线和轴线线性变化的多边形承压杆件稳定问题。卞敬玲等^[9]以二维退化梁单元为基础, 采用 Total Lagrange 格式建立三维退化梁单元几何非线性方程, 改造了几何非线性有限元方程, 推导出用于计算任意变截面承压杆件稳定问题的有限元方程。楼梦麟等^[10]以 Ritz 展开原理构建了求解子空间, 以均匀梁的低阶纵向振动模态函数, 从变系数偏微分方程描述的问题变为非线性代数方程组求解。Raftoyiannis 等^[11]求解了在偏心荷载作用下 I 字形钢柱稳定问题。王欣等^[12]针对 n 阶变截面压杆稳定性问题, 建立了 n 阶变截面压杆的微分方程组, 结合相邻阶的边界条件, 求解方程组获取递推关系式, 即关于临界荷载的方程, 应用 Newton 迭代法对方程进行迭代求解。

针对变截面细长压杆稳定临界荷载的计算研究, 侯祥林等^[13]从压杆稳定的基本原理出发, 针对稳定微分方程, 通过离散差分方法, 将形成含未知临界荷载和压杆变形位型的非线性代数方程, 提出了临界荷载的迭代数值算法, 为了更好地解决收敛性, 在此基础上建立了以结点位移和临界荷载为设计变量的一种临界荷载的优化算法^[14], 同时发现随着设计变量的数量增多, 优化计算难度加大。之后针对非线性微分方程边值问题, 建立了具有较少设计变量的优化求解算法原理^[15,16]。在此基础上,

收稿日期: 2016-06-26; 修改稿收到日期: 2016-08-05.

基金项目: 国家自然科学基金(51008200); 辽宁省自然科学基金(2015020129)资助项目.

作者简介: 侯祥林*(1962-), 男, 博士, 教授
(E-mail: drhouxl@tom.com).

本文探讨了任意约束类型的变截面梁结构稳定条件下,应用较少设计变量的临界荷载的最优化算法。

2 变截面压杆屈曲稳定条件下的临界载荷求解算法原理

2.1 变截面压杆屈曲稳定条件下满足的二阶非线性微分方程

设图 1 为几种典型约束的变截面受压杆临界稳定状态变形图。其中图 1(a)为两端简支约束,图 1(b)一端固定一端链杆约束,图 1(c)一端固定一端自由约束,图 1(d)两端固定约束。在一阶临界稳定状态下,压杆形成具有一定位型的挠曲轴线。按材料力学理论,临界稳定状态微分方程均可以表示为

$$EI(x)w'' = M(x, w) \quad (1)$$

式中 $M(x, w)$ 为杆件在 x 处的弯矩, $EI(x)$ 为变截面的弯曲刚度。边界条件均可以表示为

$$\begin{cases} w^{(k)}(0) = w^{(k)} & (k \in \{0, 1\}) \\ w^{(m)}(l) = w^{(m)} & (m \in \{0, 1\}) \end{cases} \quad (2)$$

这类问题为含有未知量的二阶非线性微分方程的边值问题,可以形成统一的求解方法。可见,图 1(a)的 $M(x, w) = -F_{cr}w$, 边界条件为 $w^{(0)}(0) = 0, w^{(0)}(l) = 0$; 图 1(b)的 $M(x, w) = -F_{cr}w - F_B(l-x)$, 边界条件为 $w^{(0)}(0) = 0, w^{(1)}(0) = 0, w^{(0)}(l) = 0$; 图 1(c)的 $M(x, w) = -F_{cr}(w - \delta)$, 边界条件为 $w^{(0)}(0) = 0, w^{(1)}(0) = 0, w^{(0)}(l) = \delta$; 图 1(d)的 $M(x, w) = -F_{cr}w - F_B(l-x)$, 边界条件为 $w^{(0)}(0) = 0, w^{(1)}(0) = 0, w^{(0)}(l) = 0, w^{(1)}(l) = 0$ 。

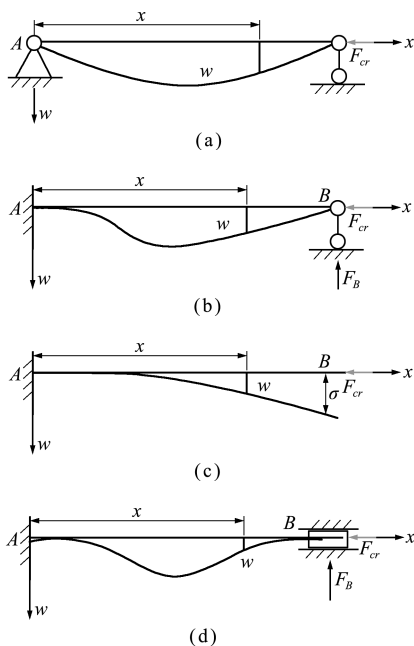


图 1 几类不同约束变截面受压杆件临界稳定状态图

Fig. 1 Critical steady state of variable cross-section compression bars with different constraint

2.2 状态方程转化

设: $y_1 = w, y_2 = w'$, 式(1)转化为状态方程形式:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{1}{EI(x)}M(x, y_1) \end{cases} \quad (3)$$

边界条件转化为

$$\begin{cases} y_k(0) = y_k & (k \in \{1, 2\}) \\ y_m(l) = y_l & (m \in \{1, 2\}) \end{cases} \quad (4)$$

稳定问题的位移具有一定的位型相对关系,设给定在 x_z 处挠度值为 y_z 。

$$y_1(x_z) = y_z \quad (5)$$

具体实例中的稳定微分方程可以通过简化计算。

若视 x 为时间概念,杆件上不同位置视为时间 x 对应的函数值,则式(3,4)成为非线性微分方程的初边值问题。

2.3 较少设计变量的变截面压杆临界载荷优化求解算法原理

构建最优化问题:

$$\min. f(\mathbf{z}) \quad (6)$$

维数为 n , 设计变量 $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$, 表示未知初始条件、未知临界载荷和未知约束力。目标函数为

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n-1} [y_j(\mathbf{z}, l) - y_j(l)]^2 + [y_1(\mathbf{z}, x_z) - y_z]^2 \quad (7)$$

$y_j(\mathbf{z}, x_k)$ ($j=1, 2$) 表示 x_k 处的 y_1 和 y_2 , 为含有待求设计变量的复杂嵌套显式函数,其程式化的计算过程如下。

(1) 分段。将长度为 l 的杆件分为 m 段,步长为 $h = l/m$, 每个分点上位置坐标为 $x_k = kh$ 。

(2) 设计变量分配。A 点边值条件 $x_0 = 0, y_1(0) = 0, y_2(0)$ 是已知(图 1(b~d))或未知(图 1(a))。取 $j=0$, 当 $y_2(0)$ 未知时, $j=j+1, y_2(0) = z_j$ 。 $y_1(0) = 0$ 和 $y_2(0)$ 形成相当于初值条件,临界载荷 $F_{cr} = z_{j+1}$ 。当存在附加约束力 F_B 时, $F_B = z_{j+2}$ 。

(3) 目标函数形成过程。由 $x_0 = 0$ 的 $y_1(0)$ 和 $y_2(0)$ 初始点和式(3,4),按数值积分Runge-Kutta法表达 $x_1 = h$ 的 $y_1(\mathbf{z}, h)$ 和 $y_2(\mathbf{z}, h)$, 它们是设计变量 \mathbf{z} 的复杂函数;由 $x_1 = (m-1)h$ 的 $y_1[\mathbf{z}, (m-1)h], y_2[\mathbf{z}, (m-1)h]$ 和式(3,4),按数值积分Runge-Kutta法表达 $x_m = l$ 时的 $y_1(\mathbf{z}, l)$ 和 $y_2(\mathbf{z}, l)$ 。

(4) 按终点边界条件和位型关系,形成目标函数:

$$f(\mathbf{z}) = \sum_{j=1}^{n-1} [y_j(\mathbf{z}, l) - y_j(l)]^2 + [y_1(\mathbf{z}, x_c) - y_c]^2$$

针对具体问题,弯矩方程不同,边界约束不同,可通过简化优化求解。

该问题转化为寻求待求设计变量,使目标函数获得极小值问题。其理想解条件为 $f(\mathbf{z}) \rightarrow 0$, 对应设计变量即为未知起点边界条件、临界载荷和附加约束力。对于上述的几种约束类型的压杆,设计变量为 2~3 个,其求解后,按步骤(3)计算相应的稳定位型。

3 稳定临界载荷与位型求解的优化程序结构组成与精度判定

3.1 程序结构

求解程序采用 Visual Basic 语言程序设计,程序组成包括:(1) 主程序;(2) 多维 Powell 法子程序;(3) 进退法子程序;(4) 黄金分割法子程序;(5) RK 法子程序;(6) 状态变量子函数;(7) 目标函数子段。

3.2 计算精度评定

针对通过 x 步长分段加密后与加密前的临界载荷计算结果的相对误差评定计算精度。

$$\epsilon = |(F_{cr}^{(2)} - F_{cr}^{(1)}) / F_{cr}^{(1)}| < \epsilon_r \quad (8)$$

4 算例分析

算例 1 图 2 所示,直径呈线性变化的两端铰支圆截面承压杆,杆长 $l = 1 \text{ m}$, $d_1 = 10 \text{ mm}$, $d_2 = 20 \text{ mm}$,材料弹性模量 $E = 200 \text{ GPa}$ 。确定图示变截面临界载荷和屈曲位型。

(1) 优化求解

本问题弯矩为 $M(x, w) = -F_{cr}w$, 设计变量 $n = 2$, $z_1 = y_2(0)$, $z_2 = F_{cr}$, 起点边界条件为 $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = z_1$, 终点边界条件 $y_1(l) = 0$, 取杆件位型中点挠度 $y_c = 0.1$ 。设黄金分割精度为 $\epsilon_1 = 10^{-4}$, 多维 Powell 无约束精度 $e = 10^{-11}$ 。设计变量初值 $z_i = \text{Rnd}() (i = 1, 2)$ 。

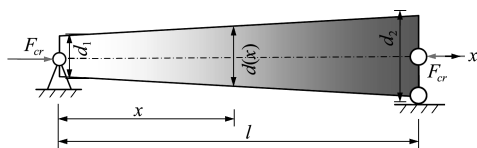


图 2 算例 1 变截面受压杆件力学模型
Fig. 2 Variable cross-section compression bars mechanical modes of example 1

变截面压杆件截面直径与惯性矩为

$$d(x) = d_1 + x(d_2 - d_1)/l$$

$$I(x) = \frac{\pi}{64} [d_1 + x(d_2 - d_1)/l]^4$$

将 dx 不同取值时的优化计算结果列入表 1。

将 $dx = 0.001$ 时的优化求解过程列入表 2。其优化计算结果为 $y_2(0) = z_1^* = 0.48305$, $F_{cr}^* = z_2^* = 3875.755 \text{ N}$ 。屈曲变形如图 3 所示。

(2) 计算结果验证

采用 $dx = 0.002$ 与 $dx = 0.001$ 两种情况的临界载荷计算结果,按式(8) 评定计算:

$$\epsilon = \frac{|3875.755 - 3875.735|}{3875.735} = 0.0052\%$$

采用文献[13]的计算结果对比

$$F_{cr} = 39.4536 \cdot \frac{200 \cdot 10^9}{1} \cdot \frac{\pi}{64} \cdot 0.01^4 = 3873.348 \text{ N}$$

表 1 算例 1 不同 dx 取值时优化计算结果
Tab. 1 Optimization result about example 1 to different dx

dx	计算轮数	优化次数	$z_1(x=0$ 处转角)	z_2 (临界载荷 F_{cr})	目标函数终值 opf
0.05	21	60	0.453896	3883.036	0.000000000006
0.01	22	65	0.477492	3876.052	0.000000000007
0.005	22	64	0.480565	3875.838	0.000000000006
0.002	23	67	0.482110	3875.777	0.000000000006
0.001	22	62	0.483047	3875.755	0.000000000005

表 2 $dx = 0.001$ 算例 1 优化计算过程
Tab. 2 Optimization computing process of example 1 to $dx = 0.001$

优化轮数	z_1 ($x=0$ 处转角)	z_2 (临界载荷 F_{cr})	目标函数 opf
0	0.70555	0.533424	0.561447717074
1	0.04008	1207.844	0.007621944802
2	0.03950	1208.927	0.006802330866
3	0.14176	2046.242	0.005071559169
4	0.22638	2715.114	0.003111980460
5	0.30926	3167.864	0.001552354694
6	0.37412	3455.792	0.000654493571
7	0.41792	3630.879	0.000246326233
8	0.44529	3734.897	0.000086114408
9	0.46159	3795.935	0.000028501905
10	0.47108	3831.103	0.000009052169
11	0.47632	3850.819	0.000002864409
12	0.47933	3861.969	0.000000881385
13	0.48097	3868.044	0.000000277079
14	0.48191	3871.515	0.000000084590
15	0.48242	3873.403	0.000000026386
16	0.48271	3874.462	0.000000008036
17	0.48287	3875.038	0.000000002473
18	0.48296	3875.418	0.000000000608
19	0.48301	3875.592	0.000000000160
20	0.48303	3875.697	0.000000000040
21	0.48304	3875.735	0.000000000017
22	0.48305	3875.755	0.000000000005

两者误差为

$$\epsilon = \frac{|3875.755 - 3873.348|}{3873.348} = 0.062\%$$

实际上,本文优化计算结果更为精确。

(3) 有限元补充验证

应用 Ansys12 计算本算例临界载荷,两端截面按圆周线等分 20 段,半径方向 4 段,长度方向 100 段,单元总数 8000 个,单元为 Solid186。计算临界载荷 $F_{cr,s} = 3874.10$ N。本文算法与此结果相对误差为 $\epsilon' = \frac{|3875.755 - 3874.10|}{3874.10} = 0.0042\%$ 。

表明本文计算结果的精确性。

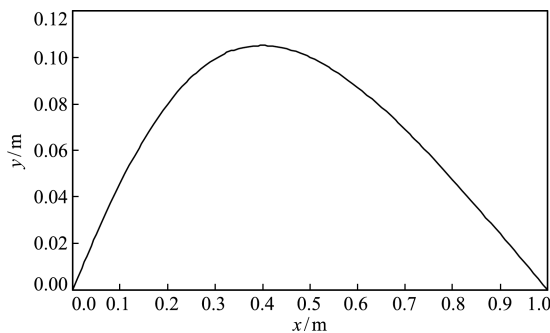


图3 算例1变截面压杆件屈曲变形图

Fig. 3 Buckling deformation of variable cross-section compression bar of example 1

算例 2 如图 4 所示,一长度为 $l = 1$ m 的变截面杆件,弯曲刚度为 $EI(x)$, 其中 $a = 20$ mm, $b = 40$ mm, $c = 20$ mm。求解:(1) 图示大头常截面情况的临界载荷;(2) 图示变截面临界荷载和屈曲位型。

挠曲线微分方程为

$$EI(x) w'' = M(x, w) = -F_{cr} w - F_B(l - x)$$

设 $fr = F_{cr}/EI_0$, $fb = F_B/EI_0$, $k = EI(x)/EI_0$, 简化形式的微分方程为 $w'' = [-fr \cdot w + fb \cdot (l - x)]/k$ 。

此问题的设计变量 $n = 2$, $z_1 = fr$, $z_2 = fb$, 起点边界条件为 $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$, 终点边界条件

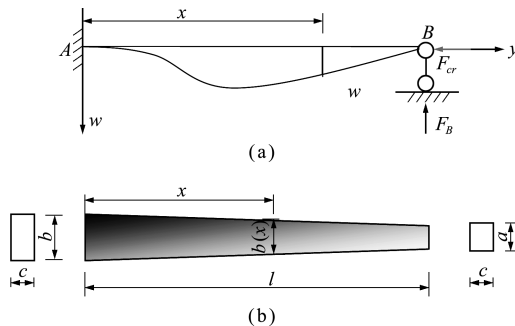


图4 算例2变截面杆件力学模型

Fig. 4 Variable cross-section compression bars mechanical modes of example 2

$y_1(l) = 0$, 取杆件位型中点挠度 $y_c = 0.1$; 设黄金分割精度为 $e_1 = 10^{-4}$, 多维 Powell 无约束精度 $e = 10^{-11}$ 。设计变量初始值 $z_{10} = \text{Rnd}()$, $z_{20} = \text{Rnd}()$ 。

杆件截面尺寸与惯性矩随位置的变化关系式为 $b(x) = b + (a - b)x/l$, $I(x) = \frac{1}{12}c[b(x)]^3$ 。

(1) 大头常截面临界载荷优化求解

当 $k = 1$ 时, 为大头常截面临界载荷求解, 是变截面问题求解的特例。程序通过 6 轮 18 次优化计算, 目标函数达到设定值, 优化计算过程列入表 3。

表 3 算例 2 大头常截面临界载荷优化计算过程
Tab. 3 Optimization computing process of critical load to big constant cross-section

优化轮数	$z_1(fr)$	$z_2(fb)$	目标函数 f_{opt}
0	0.7055	0.5334	0.0294643116733
1	16.5061	1.2606	0.0010992584916
2	19.4961	1.5206	0.0000353237313
3	20.1219	1.5503	0.0000003192161
4	20.1837	1.5527	0.0000000021274
5	20.1887	1.5529	0.0000000000178
6	20.1892	1.5529	0.0000000000001

计算的临界载荷为

$$F_{cr}^* = fr \cdot EI_0 = 20.1892 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.02 \cdot 0.04^3 = 430702.93 \text{ N} = 430.702 \text{ kN}$$

其精确值为

$$F_{cr} = 4.493^2 fr \cdot EI_0 = 20.1871 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.02 \cdot 0.04^3 = 430657.045 \text{ N} = 430.657 \text{ kN}$$

相对误差为

$$\epsilon = \left| \frac{20.1892 - 20.1871}{20.1871} \right| = 0.01\%$$

(2) 变截面临界荷载优化求解

当取 x 步长 $dx = 0.01$, 程序通过 5 轮 15 次优化计算, 目标函数达到设定值, 优化计算过程列入表 4。

表 4 $dx = 0.01$ 算例 2 优化计算过程
Tab. 4 Optimization computing process of example 2 to $dx = 0.01$

迭代轮数	$z_1(fr)$	$z_2(fb)$	目标函数 f_{opt}
0	0.705547	0.533424	0.0925769684698
1	6.1228	2.0518	0.0065661499313
2	7.2581	2.3837	0.0000333603542
3	7.3519	2.3925	0.000000159686
4	7.3540	2.3927	0.0000000000045
5	7.3540	2.3927	0.0000000000001

得到临界荷载和附加约束力为

$$F_{cr}^s = fr \cdot EI_0 = 7.3540 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.02 \cdot 0.04^3 = 156885.34 \text{ N} = 156.885 \text{ kN}$$

$$F_B^s = 2.3927 \cdot 200 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.02 \cdot 0.04^3 = 51044.27 \text{ N} = 51.044 \text{ kN}$$

杆件屈曲位移形曲线如图5所示。

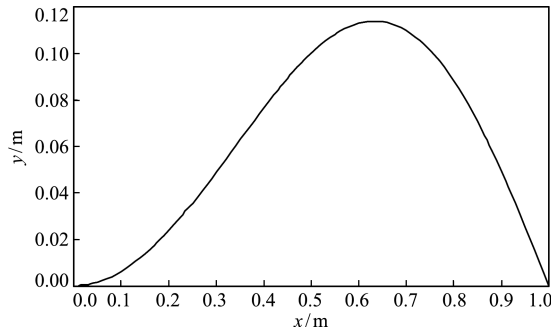


图5 算例2变截面压杆件屈曲变形

Fig.5 Buckling deformation of variable cross-section compression bar of example 2

加密 x 步长,取 $dx = 0.001$ 情况计算临界荷载,程序通过4轮15次优化计算,目标函数达到设定值,求解过程列入表5。

(3) 精度判定

按式(8)计算相对误差为

$$\epsilon = \left| \frac{7.3613 - 7.3540}{7.3540} \right| = 0.099\%$$

精度相当高。

(4) 有限元补充验证

如图6所示,应用Ansys12计算算例2的临界荷载,单元采用Solid45,截面矩形按4段 \times 4段划分,长度方向50段,单元总数800个。计算的临界荷载为 $F_{cr,s} = 156584 \text{ N} = 156.58 \text{ kN}$ 。

本文算法与Ansys计算的相对误差为

$$\epsilon' = \left| \frac{156.88 - 156.58}{156.58} \right| = 0.192\%$$

表明本文算法与有限元软件计算结果非常接近。

若设定相对误差限为0.2%,所有计算临界荷载误差均在允许误差限内。

表5 $dx = 0.001$ 算例2优化计算过程

Tab.5 Optimization computing process of example 2 to $dx = 0.001$

优化轮数	$z_1(fr)$	$z_2(fb)$	目标函数 f_{opt}
0	0.7055	0.5334	0.0576670686225
1	6.9383	0.9340	0.0001063140925
2	7.3445	0.9576	0.0000001519964
3	7.3610	0.9582	0.0000000000601
4	7.3613	0.9582	0.0000000000001

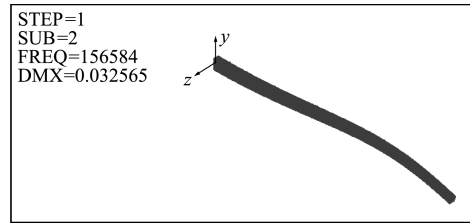


图6 算例2临界荷载 Ansys12 计算结果截图

Fig.6 Computing result of critical load of example 2 with Ansys 12

5 结论

本文针对变截面受压杆件临界荷载的求解问题,提出将变截面杆件稳定的非线性平衡微分方程边值问题转换为初值问题的临界荷载的优化算法。应用VB编制了通用变截面临界荷载优化求解程序。分析求解了两类典型变截面杆件临界荷载算例。采用计算精度评定法和Ansys有限元软件计算结果补充对比,表明计算的临界荷载结果正确。以较少设计变量实现精确的临界荷载优化计算求解,为工程中求解此类问题提供了一种精度高、收敛快的变截面压杆临界荷载优化有效新算法。

参考文献(References):

- [1] 单辉祖,材料力学(第3版)[M].北京:高等教育出版社,2009.(SHAN Hui-zu. *Material Mechanics (The Third Edition)* [M]. Beijing: Higher Education Press,2009. (in Chinese))
- [2] 龙驭球,包世华.结构力学(第2版)[M].北京:高等教育出版社,1996.(LONG Yu-qiu, BAO Shi-hua. *Structural Mechanics (The Second Edition)* [M]. Beijing: Higher Education Press,1996. (in Chinese))
- [3] Tompson J M T, Hunt G W. A general theory of elastic stability[J]. *Journal of Structural Engineering*, 1973(17):50-61.
- [4] 皮萨连科,亚科符列夫,马特维也夫.材料力学手册[M].范钦珊,朱祖,译.北京:中国建筑工业出版社,1981.(Pisarenko T C, Yakovlev A H, Matviev B B. *Material Mechanics Manual* [M]. FAN Qin-shan, ZHU Zu, translated. Beijing: Chinese Architectural Industry Press,1981. (in Chinese))
- [5] 赵毅强.楔形杆件结构的弹性稳定分析[J].建筑结构学报,1990,11(6):58-68.(ZHAO Yi-qiang. Stability analysis of elasticity about wedge-shape rods structure [J]. *Journal of Building Structure*, 1990, 11(6):58-68. (in Chinese))
- [6] 吴亚平.变截面压杆稳定计算的等效刚度法[J].力学与实践,1994,16(1):58-60.(WU Ya-ping. Equivalent stiffness method for stability calculation of variable section pressure bar [J]. *Mechanics and Practice*, 1994, 16(1):58-60. (in Chinese))
- [7] 刘庆潭.含锥形变截面压杆稳定计算的传递矩阵法[J].计算结构力学及其在应用,1996,13(3):364-368.

- (LIU Qing-tan. Method of transfer matrix of calculation on stability of compressed bar with variable section[J]. *Computational Structural Mechanics and Applications*, 1996, **13**(3):364-368. (in Chinese))
- [8] Lee B K, Oh S J. Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, **37**(18):2507-2518.
- [9] 卞敬玲, 王小岗. 变截面压杆稳定计算的有限单元法[J]. 武汉大学学报(工学版), 2002, **35**(4):102-104. (BIAN Jing-ling, WANG Xiao-gang. The finite element method of variable cross-section compression bar stability [J]. *Engineering Journal of Wuhan University*, 2002, **35**(4):102-104. (in Chinese))
- [10] 楼梦麟, 李建元. 变截面压杆稳定问题的半解析解[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2004, **32**(7):857-860. (LOU Meng-lin, LI Jian-yuan. The semi-analytical solution of variable cross-section compression bar stability[J]. *Journal of Tongji University(Natural Science Edition)*, 2004, **32**(7):857-860. (in Chinese))
- [11] Raftoyiannis I G, Ermopoulos J C. Stability of tapered and stepped steel columns with initial imperfections[J]. *Engineering Structures*, 2005, **27**(8):1248-1257.
- [12] 王 欣, 易怀军, 赵日鑫, 等. 一种 n 阶变截面压杆稳定性计算方法的研究[J]. 中国机械工程, 2014, **25**(13):1744-1747, 1799. (WANG Xin, YI Huai-jun, ZHAO Ri-xin, et al. Research on stability analysis method of n -order variable cross-section compressed bars[J]. *China Mechanical Engineering*, 2014, **25**(13):1744-1747, 1799 (in Chinese))
- [13] 侯祥林, 范 炜, 贾连光. 变截面压杆临界载荷的迭代算法[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, **43**(s1):237-240. (HOU Xiang-lin, FAN Wei, JIA Lian-guang. Iterative algorithm of the critical load about variable cross-section bar[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2011, **43**(s1):237-240. (in Chinese))
- [14] 侯祥林, 卢宏峰, 范 炜, 等. 变截面承压杆的临界载荷的优化算法研究与应用[J]. 工程力学, 2013, **30**(s):6-10. (HOU Xiang-lin, LU Hong-feng, FAN Wei, et al. Optimization algorithm and application of critical load for variable cross-section compression bar [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, **30**(s):6-10. (in Chinese))
- [15] 侯祥林, 钱 颖, 吴海涛. 非线性常微分方程边值问题的最优化解法[J]. 工程数学学报, 2010, **27**(4):663-668. (HOU Xiang-lin, QIAN Ying, WU Hai-tao. Optimization algorithm of boundary value problem for nonlinear ordinary differential equations[J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2010, **27**(4):663-668. (in Chinese))
- [16] 侯祥林, 刘铁林, 翟中海. 非线性偏微分方程边值问题的优化算法研究与应用[J]. 物理学报, 2011, **60**(9):13-21. (HOU Xiang-lin, LIU Tie-lin, ZHAI Zhong-hai. Study and application of optimization algorithm about nonlinear partial differential equations with boundary value problem[J]. *Acta Phys Sin*, 2011, **60**(9):13-21. (in Chinese))

Optimization algorithm of boundary value problem of stable nonlinear differential equation for variable cross-section compression bar

HOU Xiang-lin^{*1}, HU Jian-qiang¹, LU Hong-feng², WANG Chun-gang³

(1. School of Mechanical Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China;

2. China Northeast Architectural Design & Research Institute Co. Ltd, Shenyang 110006, China;

3. School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, Shenyang 110168, China)

Abstract: For computation of critical load of variable cross-section compression bar under all types of constraints, numerical algorithms for nonlinear differential equation are combined with optimization methods. Taking initial condition of the starting point boundary, unknown critical load and additional constraint force as design variables, terminal boundary value condition and buckling position condition as objective function, an optimization algorithm for critical load and stable buckling deformation of variable cross-section compression bar is proposed. Visual Basic is used to develop a universal computing program. Typical examples are analyzed. Comparison shows that critical load is computed with high precision and the method can be applied in engineering.

Key words: compression bar stability; boundary value problem nonlinear differential equation; optimization algorithm; critical load; buckling position

引用本文/Cite this paper:

侯祥林, 胡建强, 卢宏峰, 等. 变截面压杆稳定非线性微分方程边值问题的最优化解法研究[J]. 计算力学学报, 2017, **34**(2):137-142.

HOU Xiang-lin, HU Jian-qiang, LU Hong-feng, et al. Optimization algorithm of boundary value problem of stable nonlinear differential equation for variable cross-section compression bar[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, **34**(2):137-142.